放物線の交点による四角形の対角線

a を実数の定数とし，次の 2 つの曲線

$$C_1 : y=\frac{1}{2}x^2-a$$

$$C_2 : x=\frac{1}{2}y^2-a$$

があり，C_1，C_2 は相異なる 4 つの共有点をもっている。

このとき，次の問いに答えよ。

(1) C_1，C_2 の共有点を通る円の中心の座標と半径を求めよ。

(2) この 4 つの共有点を頂点にもつ四角形を考えるとき，2 本の対角線の方程式をそれぞれ求めよ。

＜ '11 立命館大 ＞

【戦略】

(1) **直接交点を出し，それを通る円の方程式を求めるという直接的な路線では無理があります。**

交点に触れることなく，交点を通る図形を表す以下の手法を学習しているかどうかにかかってきます。

> $f(x, y)=0$，$g(x, y)=0$ **という 2 つの曲線の交点を通る図形が表す方程式は，k を実数として**
>
> $$f(x, y)+k\,g(x, y)=0$$
>
> **と表せる。**

今回は $x^2-2y-2a=0$，$y^2-2x-2a=0$ **という 2 つの放物線の交点を通る図形を表したいため，**

$$(x^2-2y-2a)+k(y^2-2x-2a)=0 \quad \cdots(*)$$

と表します。

このように表した時点で交点を通ることは保証されますから，あとは $(*)$ が円であることを満たせばよく，係数的に $k=1$ ということになります。

(2) **やはり交点に直接触れたくはありませんが，C_1，C_2 が $y=x$ について対称であることに注目すれば，$y=x$ が求める対角線の 1 つであるということが見出せます。**

そうなると，今回の四角形の対角線 (2 本の直線) が表す方程式は

$$(y-x)\{y-(px+q)\}=0$$

という形で表せます。

(この ＝ 満たす (x, y) 集まれ～と言って集まってきた点の集合体が直線 $y=x$ と $y=px+q$)

対角線は，もちろん C_1，C_2 の交点を通る図形なので，$(*)$ の形で表せます。

あとは $(*)$ が $(y-x)\{y-(px+q)\}=0$ の形に変形できればよく，係数的に $k=-1$ ということになります。

【解答】

(1) C_1，C_2 の式をそれぞれ整理すると，

$$x^2-2y-2a=0,\quad y^2-2x-2a=0$$

となる。

ここで，k を実数として

$$(x^2-2y-2a)+k(y^2-2x-2a)=0 \cdots(*)$$

はこの 2 曲線の交点全てを通る図形を表す。

$(*)$ が円を表すとき，$k=1$ であるので，

$$x^2+y^2-2x-2y-4a=0$$

これが題意の円の方程式であり，これを整理すると

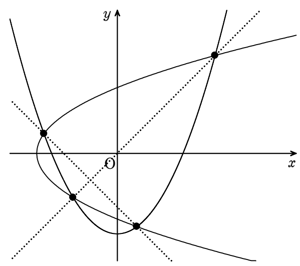
$$(x-1)^2+(y-1)^2=4a+2$$

ゆえに求める円の中心の座標は $(1, 1)$ … 答　半径は $\sqrt{4a+2}$ … 答

(2) C_1，C_2 は $y=x$ に関して対称なので，求める対角線の一つは

$$y=x$$

である。



求める 2 本の対角線が表す方程式は

$$(y-x)\{y-(px+q)\}=0$$

と表せる。

$(*)$ において，$k=-1$ とすると

$$(x^2-2y-a)-(y^2-2x-a)=0$$

で，これを整理すると

$$(x+y)(x-y)-2(y-x)=0$$

すなわち $(y-x)\{y-(-x-2)\}=0$ であり，求める 2 本の対角線は

$$y=x,\ y=-x-2 \cdots 答$$

【総括】

$f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ という 2 つの曲線の交点を通る図形が表す方程式は，k を実数として

$$f(x,y)+k\,g(x,y)=0$$

と表せる。

という「交点を通る図形」についての方程式は，「聞けば分かるレベルから，「状況に応じて使える」というレベルまで昇華させましょう。

【交点を通る図形の方程式の解説】

$f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ という 2 つの曲線の交点を (α,β) とすると

$$\begin{cases} f(\alpha,\beta)=0 \\ g(\alpha,\beta)=0 \end{cases}$$

であるため，実数 k に対して，$f(\alpha,\beta)+k\,g(\alpha,\beta)=0$

この結果は，

曲線 $f(x,y)+k\,g(x,y)=0$ は k の値によらず (α,β) を通る

ということを意味します。

※ 注意

曲線 $g(x,y)=0$ も当然 (α,β) を通る曲線ですが，どのように k をとったとしても

$$f(x,y)+k\,g(x,y)=0$$

という形では表せません。

（逆に $f(x,y)=0$ という曲線は $k=0$ とすることで表現できる。）

つまり，k をくっつけた側の曲線だけは $f(x,y)+k\,g(x,y)=0$ という形では表現できないことになります。

$f(x,y)+k\,g(x,y)=0$ が $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ という 2 つの曲線の交点を通ることは保証されましたので，あとは

$f(x,y)+k\,g(x,y)=0$ がどんな図形を表すか（表せばよいか）

を問題に応じて対応すればよいことになります。

なお，上述の「k をくっつけた側の曲線だけは表現できない」という弱点を克服しようとするとなると

$$\ell f(x,y)+k\,g(x,y)=0$$

というように，f の方を ℓ 倍，g の方を k 倍というようにしてやります。

交点 (α,β) を通ることは相変わらず保証されています。

$f(x,y)=0$ そのものを表したければ，$\begin{cases} \ell=1 \\ k=0 \end{cases}$ とすればいいですし，

$g(x,y)=0$ そのものを表したければ，$\begin{cases} \ell=0 \\ k=1 \end{cases}$ とすればいいわけです。

＜代表的な例＞　～円束～

円 C_1：$x^2+y^2+ax+by+c=0$ と，円 C_2：$x^2+y^2+px+qy+r=0$ という２円 C_1，C_2 に対して

$$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+px+qy+r)=0$$

という図形は C_1，C_2 の交点を通る図形です。

交点を通る「円」が欲しければ，$k\fallingdotseq-1$ とすればよいですね。

$$■x^2+◆y^2+●x+▲y+☆=0$$

が円を表す（$(x-★)^2+(y-☆)^2=□$ の形でまとまる）ための条件は

x^2，y^2 の係数が等しい

ということで，$k\fallingdotseq-1$ であれば円ということなります。

交点を通る直線が欲しければ，x^2，y^2 という項に消えていただきたいので $k=-1$ とします。

イメージとして

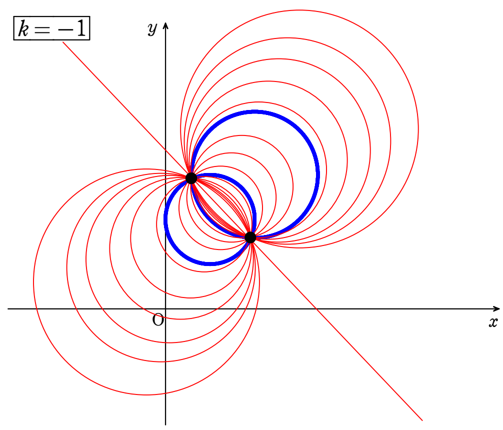
C_1：$(x-1)^2+(y-2)^2=1$（$x^2+y^2-2x-4y+4=0$）

C_2：$(x-2)^2+(y-3)^2=2$（$x^2+y^2-4x-6y+11=0$）

の交点を通る曲線群

$$(x^2+y^2-2x-4y+4)+k(x^2+y^2-4x-6y+11)=0$$

を図示してみます。



k が動くにつれて円も動きますが，C_1，C_2 の交点を通ることは保証されています。k が動いたときの (*) の動いた様子は円が束になっているように見えるため，束と言います。