不等式 $b^2-4c<0$ を満たす整数 b，c に対して２次方程式

$$x^2+bx+c=0$$

の解の一方を α とする。

条件

$$a_0=1,\ a_1=\alpha,\ a_{n+2}+ba_{n+1}+ca_n=0\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ が周期をもつとき，b，c を求めよ。

ただし，数列 $\{a_n\}$ が周期 p $(p>0)$ をもつとは，

$$a_{n+p}=a_n\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

が成り立つことをいう。

＜ '92 早稲田大 ＞

【戦略】

実験をしてみます。

$a_2+ba_1+ca_0=0$ **から，** $a_2+b\alpha+c=0$
α **が** $x^2+bx+c=0$ **の解であることから，** $\alpha^2+b\alpha+c=0$

これら２式から， $a_2=\alpha^2$ **を得ます。**

$a_3+ba_2+ca_1=0$ **から，** $a_3+b\alpha^2+c\alpha=0$
$\alpha^2+b\alpha+c=0$ **から，** $\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0$

これら２式から $a_3=\alpha^3$ **を得ます。**

ここから， $a_n=\alpha^n\,(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ **という予想が立つと思います。**

もちろん，３項間漸化式をもとにして定まる数列ですから，数学的帰納法で示します。（$n=k$，$k+1$ **を仮定して** $n=k+2$ **のときの成立を目指します。）**

これが周期 p **をもつとすると，** $a_{0+p}=a_0$，**すなわち** $\alpha^p=1$ **である必要があります。**

これにより，α **は１の** p **乗根の形である必要があるため，極形式で言えば** $\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ **という形である必要性が出てきます。**

係数である b，c **と絡めるためには，解と係数の関係を目論みます。**

もう一方の解は共役複素数 $\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$ **ということになります。**

解と係数の関係から， $\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=-b\\ \alpha\overline{\alpha}=c\end{cases}$ **であり，** $\begin{cases}b=-2\cos\theta\\ c=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$

ということになり，整数 b **がそもそも** ±2，±1，0 **に限られます。**

$b^2-4c<0$ **という条件，**$c=1$ **であることから** $b^2-4<0$ **なので** $b=\pm1$，0 **と絞られます。**

これにより，$(b,\ c)=(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)$ **と決まりますが，一応今回は**

任意の n **に対して** $a_{n+p}=a_n \Longrightarrow a_p=a_0$ **となる必要がある**

という必要条件的に出しましたので，これらの $(b,\ c)$ **の値の組のときに数列** $\{a_n\}$ **が周期性をもつかどうかという十分性をチェックしておきます。**

【解答】

与えられた漸化式に $n=0$ を代入すると $a_2+ba_1+ca_0=0$

これより，$a_2+b\alpha+c=0$ …①

α は $x^2+bx+c=0$ の解であるという条件から $\alpha^2+b\alpha+c=0$ …②

①－② より，$a_2-\alpha^2=0$，すなわち $a_2=\alpha^2$

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$a_n=\alpha^n$ …(*) であることを n に関する数学的帰納法によって証明する。

[i]　$n=0$，1 のとき

$a_0=1\,(=\alpha^0)$，$a_1=\alpha\,(=\alpha^1)$ より，$n=0$，1 のとき (*) は成立。

[ii]　$n=k$，$k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$\begin{cases}a_k=\alpha^k\\ a_{k+1}=\alpha^{k+1}\end{cases}$　と仮定する。

与えられた漸化式から，$a_{k+2}+ba_{k+1}+ca_k=0$ であるから

$$a_{k+2}+b\alpha^{k+1}+c\alpha^k=0 \ \cdots③$$

一方，② の両辺に α^k をかけると

$$\alpha^{k+2}+b\alpha^{k+1}+c\alpha^k=0 \ \cdots④$$

③－④ より，$a_{k+2}-\alpha^{k+2}=0$，すなわち $a_{k+2}=\alpha^{k+2}$

よって，$n=k+2$ のときも (*) は成立する。

[i]，[ii] から，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して $a_n=\alpha^n$ が成立する。

数列 $\{a_n\}$ が周期 p をもつとき，$a_p=a_0$ であるから

$$\alpha^p=1$$

これより，$|\alpha|^p=1$ であり，$|\alpha|$ は実数であるため，$|\alpha|=1$

ゆえに，$x^2+bx+c=0$ の解 α は

$$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$$

とおくことができ，もう一方の解は共役複素数

$$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$$

となる。

解と係数の関係から，$\begin{cases}\alpha+\overline{\alpha}=-b\\ \alpha\overline{\alpha}=c\end{cases}$，すなわち $\begin{cases}b=-2\cos\theta\\ c=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\end{cases}$

条件 $b^2-4c<0$，及び $c=1$ より $b^2-4<0$ であり，$-2<b<2$ を得るが b は整数であるため，$b=-1$，0，1

これより整数 b，c の組は

$$(b,\ c)=(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)$$

[1]　$(b, c)=(-1, 1)$ のとき

α は $\alpha^2-\alpha+1=0$ の解であり，両辺に $\alpha+1$ をかけると

$$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$$

これより，$\alpha^3=-1$ となり，$\alpha^6=1$ となる。

つまり，数列 $\{a_n\}$ は周期 6 をもつ。

[2]　$(b, c)=(0, 1)$ のとき

α は $\alpha^2+1=0$ の解であり，$\alpha^4=1$ を満たす。

つまり，数列 $\{a_n\}$ は周期 4 をもつ。

[3]　$(b, c)=(1, 1)$のとき

α は $\alpha^2+\alpha+1=0$ の解であり，両辺に $\alpha-1$ をかけると

$$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

これより，$\alpha^3=1$ を得るため，数列 $\{a_n\}$ は周期 3 をもつ。

以上から，求める整数 b，c は

$$(b, c)=(-1, 1), (0, 1), (1, 1) \cdots 答$$

【総括】

漸化式を解きにいくという姿勢というよりは，

実験→予想→裏付け

という手を動かすという姿勢から崩れます。

最後の十分性のチェックについては，「今回は」自明と感じる人もいるかとは思いますが，一般的には

$a_p=a_0$ だからといって，任意の n に対して $a_{n+p}=a_n$ とは言い切れないということから，チェックしておきました。