

ペル方程式4

正の整数 n に対して

$$(1 + \sqrt{2})^n = x_n + y_n \sqrt{2}$$

が成り立つように整数 x_n, y_n を定める。

- (1) x_{n+1}, y_{n+1} を x_n, y_n で表せ。
- (2) n が偶数なら $x_n^2 - 2y_n^2 = 1$, n が奇数なら $x_n^2 - 2y_n^2 = -1$ であることを証明せよ。
- (3) 任意の n に対して, $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\frac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値であることを証明せよ。

< '84 一橋大 >