正の整数 n に対して

$$(1+\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$$

が成り立つように整数 x_n，y_n を定める。

(1) x_{n+1}，y_{n+1} を x_n，y_n で表せ。

(2) n が偶数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数なら $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$ であることを証明せよ。

(3) 任意の n に対して，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値であることを証明せよ。

＜ '84 一橋大 ＞

【戦略 1】

(1)
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1}&=(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})\\&=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\\&=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

という一方で，$(1+\sqrt{2})^{n+1}=x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}$ であるため
$\begin{cases}x_{n+1}=x_n+2y_n\\y_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$ **という結論（連立漸化式）を得ます。**

ただし，単純比較してよいかという問題があるため，

整数 m，n，m'，n' に対して

$$m+n\sqrt{2}=m'+n'\sqrt{2} \Longrightarrow m=m',\ n=n'$$

が言えるかということを解答中では詰めていきます。

(2) **(1) の結果から**

$$\begin{aligned}x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2&=(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2\\&=-(x_n{}^2-2y_n{}^2)\end{aligned}$$

という等比数列の構造を得るため，直ちに主張が従います。

(3) **注目すべきは $\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ という「$\dfrac{x_n}{y_n}$ と $\sqrt{2}$ との誤差」です。**

「よい近似値」とは「誤差が小さい」ということであり，

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$$

ということが言えれば証明完了です。

この $\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}$ を登場させるために (2) の結果である

$$x_n{}^2-2y_n{}^2=(-1)^n$$

を利用します。

$$(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$$
$$(1+\sqrt{2})^n(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$$

ということから

$$x_n-y_n\sqrt{2}=\left(\frac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n=(1-\sqrt{2})^n$$

であり，両辺 y_n（>0）で割ることで

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|=\left|\frac{(1-\sqrt{2})^n}{y_n}\right|$$

という誤差の式を Get できます。

【解 1】

(1)
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{n+1}&=(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})\\&=(x_n+y_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2})\\&=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}\end{aligned}$$

一方，$(1+\sqrt{2})^{n+1}=x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}$

ゆえに，$x_{n+1}+y_{n+1}\sqrt{2}=(x_n+2y_n)+(x_n+y_n)\sqrt{2}$

すなわち

$$\{x_{n+1}-(x_n+2y_n)\}+\{y_{n+1}-(x_n+y_n)\}\sqrt{2}=0 \quad \cdots ①$$

$y_{n+1}-(x_n+y_n)\neq 0$ と仮定すると

$$\sqrt{2}=-\frac{x_{n+1}-(x_n+2y_n)}{y_{n+1}-(x_n+y_n)}$$

x_n，y_n，x_{n+1}，y_{n+1} は整数であるため，(無理数)＝(有理数) となり矛盾する。

これより $y_{n+1}-(x_n+y_n)=0$

このとき ① から $x_{n+1}-(x_n+2y_n)=0$

以上から，$\begin{cases}x_{n+1}=x_n+2y_n\\y_{n+1}=x_n+y_n\end{cases}$ …答

(2) (1) より

$$\begin{aligned}x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2&=(x_n+2y_n)^2-2(x_n+y_n)^2\\&=-(x_n{}^2-2y_n{}^2)\end{aligned}$$

ここで，$(1+\sqrt{2})^1=1+1\sqrt{2}$ であり，$x_1=1$，$y_1=1$

数列 $\{x_n{}^2-2y_n{}^2\}$ は初項 $x_1{}^2-2y_1{}^2=-1$，公比 -1 の等比数列

ゆえに，

$$\begin{aligned}x_n{}^2-2y_n{}^2&=(-1)\cdot(-1)^{n-1}\\&=(-1)^n \quad \cdots (*)\end{aligned}$$

したがって，$x_n{}^2-2y_n{}^2=\begin{cases}1 & (n\text{ が偶数のとき})\\-1 & (n\text{ は奇数のとき})\end{cases}$

ということになり，題意は示された。

(3) (＊) より，$(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$

よって $(1+\sqrt{2})^n(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$

これより，$x_n-y_n\sqrt{2}=\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n$（$=(1-\sqrt{2})^n$）

両辺 y_n（>0）で割ると，$\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^n}{y_n}$

したがって，

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right| &= \left|\frac{(1-\sqrt{2})^n}{y_n}\right| \\ &= \frac{|1-\sqrt{2}|^n}{y_n} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{y_n} \\ &> \frac{(\sqrt{2}-1)^{n+1}}{y_{n+1}} \quad (\because\ y_n<y_{n+1},\ (\sqrt{2}-1)^n>(\sqrt{2}-1)^{n+1}) \\ &= \left|\frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{y_{n+1}}\right| \\ &= \left|\frac{x_{n+1}-y_{n+1}\sqrt{2}}{y_{n+1}}\right| \\ &= \left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|\end{aligned}$$

となり，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値である。

【戦略 2】(2) について

(1) で得られた漸化式をもとに数学的帰納法を用いてもよいでしょう。

【解 2】(2) について

$m=1,\ 2,\ \cdots$ について，$\begin{cases} {x_{2m-1}}^2-2{y_{2m-1}}^2=-1 \\ {x_{2m}}^2-2{y_{2m}}^2=1 \end{cases}$ $\cdots$(☆) であることを m についての数学的帰納法で示す。

[1]　$m=1$ のとき

$\begin{cases} (1+\sqrt{2})^1=1+1\sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2} \end{cases}$ より，$(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$，$(x_2,\ y_2)=(3,\ 2)$

よって，$\begin{cases} {x_1}^2-2{y_1}^2=1^2-2\cdot1^2=-1 \\ {x_2}^2-2{y_2}^2=3^2-2\cdot2^2=1 \end{cases}$ であり，(☆) は正しい。

[2]　$m=k$ ($k=1,\ 2,\ \cdots$) のとき $\begin{cases} {x_{2k-1}}^2-2{y_{2k-1}}^2=-1 \\ {x_{2k}}^2-2{y_{2k}}^2=1 \end{cases}$ と仮定する。

このとき (1) の結果から

$$\begin{aligned}{x_{2k+1}}^2-2{y_{2k+1}}^2 &= (x_{2k}+2y_{2k})^2-2(x_{2k}+y_{2k})^2 \\ &= -({x_{2k}}^2-2{y_{2k}}^2) \\ &= 1 \quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}{x_{2k+2}}^2-2{y_{2k+2}}^2 &= (x_{2k+1}+2y_{2k+1})^2-2(x_{2k+1}+y_{2k+1})^2 \\ &= -({x_{2k+1}}^2-2{y_{2k+1}}^2) \\ &= -1\end{aligned}$$

となり，$m=k+1$ のときも (☆) は正しい。

以上 [1]，[2] から，(☆) が示され，題意も示された。

【戦略 3】(3) について

(2) で得た結果を $(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$ と見るという活用が思い浮かばなかった場合，

n が偶数のとき $x_n{}^2-2y_n{}^2=1$，n が奇数のとき $x_n{}^2-2y_n{}^2=-1$

をそのまま扱うことで $\dfrac{x_n}{y_n}$ を登場させます。

【解 3】(3) について

以後，x_n，y_n $(n=1，2，\cdots)$ は正の整数であることに注意する。

[1] n が偶数のとき

$n+1$ は奇数であるから $\begin{cases} x_n{}^2-2y_n{}^2=1 & \cdots ① \\ x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2=-1 & \cdots ② \end{cases}$

① の両辺を $y_n{}^2\,(>0)$ で割ると，$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2-2=\dfrac{1}{y_n{}^2}$

よって，$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2=2+\dfrac{1}{y_n{}^2}$ で，$\dfrac{x_n}{y_n}>0$ より，$\dfrac{x_n}{y_n}=\sqrt{2+\dfrac{1}{y_n{}^2}}$

同様に ② から，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\sqrt{2-\dfrac{1}{y_{n+1}{}^2}}$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|-\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2-\frac{1}{y_{n+1}{}^2}}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{2+\frac{1}{y_n{}^2}}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right)}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2y_n{}^2}\right)}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right)-1\right\}\right|-\left|\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2y_n{}^2}\right)-1\right\}\right| \\
&=\left|\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right)\right|-\left|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2y_n{}^2}\right| \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y_{n+1}{}^2}-\frac{1}{y_n{}^2}\right) \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y_{n+1}}+\frac{1}{y_n}\right)\left(\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{1}{y_n}\right) \\
&<0 \quad (\because\ y_{n+1}>y_n>0)
\end{aligned}$$

ゆえに，$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$

[2] n が奇数のとき

$n+1$ は偶数であるから $\begin{cases} x_n{}^2-2y_n{}^2=-1 & \cdots ③ \\ x_{n+1}{}^2-2y_{n+1}{}^2=1 & \cdots ④ \end{cases}$

③ の両辺を $y_n{}^2\,(>0)$ で割ると，$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2-2=-\dfrac{1}{y_n{}^2}$

よって，$\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)^2=2-\dfrac{1}{y_n{}^2}$ で，$\dfrac{x_n}{y_n}>0$ より，$\dfrac{x_n}{y_n}=\sqrt{2-\dfrac{1}{y_n{}^2}}$

同様に ④ から，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}=\sqrt{2+\dfrac{1}{y_{n+1}{}^2}}$

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|-\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2+\frac{1}{y_{n+1}{}^2}}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{2-\frac{1}{y_n{}^2}}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2\left(1+\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right)}-\sqrt{2}\right|-\left|\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2y_n{}^2}\right)}-\sqrt{2}\right| \\
&=\left|\sqrt{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right)-1\right\}\right|-\left|\sqrt{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2y_n{}^2}\right)-1\right\}\right| \\
&=\left|\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2y_{n+1}{}^2}\right|-\left|\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2y_n{}^2}\right)\right| \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y_{n+1}{}^2}-\frac{1}{y_n{}^2}\right) \\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y_{n+1}}+\frac{1}{y_n}\right)\left(\frac{1}{y_{n+1}}-\frac{1}{y_n}\right) \\
&<0 \quad (\because\ y_{n+1}>y_n>0)
\end{aligned}$$

ゆえに，$\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$

[1]，[2] から，n の偶奇によらず

$$\left|\frac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$$

が成り立ち，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値である。

【戦略 4】(3) について

目に優しく，$d_n=\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ とおきます。

結局示すべきは $d_{n+1}<d_n$ ということなのですが，$d_n>0$，$d_{n+1}>0$ であることを考えれば

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}<1$$

が言えれば解決です。(確率の最大問題でよくやる隣接 2 項比較)

【解 4】(3) について

$d_n=\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ とおく。

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\left|\frac{\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}}{\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}}\right|$$

$$=\left|\frac{\dfrac{x_{n+1}-y_{n+1}\sqrt{2}}{y_{n+1}}}{\dfrac{x_n-y_n\sqrt{2}}{y_n}}\right|$$

$$=\left|\frac{y_n}{y_{n+1}}\right|\cdot\left|\frac{x_{n+1}-y_{n+1}\sqrt{2}}{x_n-y_n\sqrt{2}}\right|$$

(2) より，$(x_n+y_n\sqrt{2})(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$

よって　$(1+\sqrt{2})^n(x_n-y_n\sqrt{2})=(-1)^n$

これより，$x_n-y_n\sqrt{2}=\left(\dfrac{-1}{1+\sqrt{2}}\right)^n$（ $=(1-\sqrt{2})^n$ ）

したがって，

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}=\left|\frac{y_n}{y_{n+1}}\right|\cdot\left|\frac{(1-\sqrt{2})^{n+1}}{(1-\sqrt{2})^n}\right|$$
$$=\frac{y_n}{y_{n+1}}\cdot(\sqrt{2}-1)$$

$y_{n+1}>y_n>0$, および $0<\sqrt{2}-1<1$ であることから

$$\frac{d_{n+1}}{d_n}<1$$

$d_n>0$ より，$d_n>d_{n+1}$，すなわち $\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|>\left|\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}-\sqrt{2}\right|$

これより，$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ は $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値である。

【総括】

結局，

$\dfrac{x_{n+1}}{y_{n+1}}$ が $\dfrac{x_n}{y_n}$ よりも $\sqrt{2}$ のよい近似値

ということを数式的にどのように立式するかが言えなければ身動きが取れません。

そういった意味で，誤差である $\left|\dfrac{x_n}{y_n}-\sqrt{2}\right|$ に注目できるかどうかは一つの山場でしょう。

本問 (2) の結果は

ペル方程式 $x^2-2y^2=1$ の解として $(x,y)=(x_2,y_2)$, (x_4,y_4), ……
ペル方程式 $x^2-2y^2=-1$ の解として $(x,y)=(x_1,y_1)$, (x_3,y_3), ……
というものが存在する

ということであり，ペル方程式の解を用いて，よりよい近似値がつくられていくという結果は興味深いですね。