

サイクリックな形の2次関数の最大値

$a < b < c$ のとき、次の間に答えよ。

(1) 2次方程式

$$(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b) = 0$$

の2解 x_1, x_2 ($x_1 \leq x_2$) と a, b, c の大小を比較せよ。

(2) $a \leq x \leq c$ における関数

$$y = |(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)|$$

の最大値を求めよ。

< '64 横浜国立大 >

【戦略】

(1) 2次方程式を実際に解くというよりは、解を視覚化するために

$f(x) = (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)$ とおき、グラフを考えたくなります。

$y = f(x)$ と x 軸との交点の x 座標が x_1, x_2 です。

あとは a, b, c の位置関係を考えるにあたり、

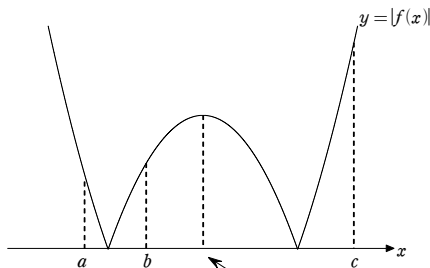
$$f(a), f(b), f(c)$$

を計算したくなるはずですが、

($f(x)$ の形的にも a, b, c を代入したくなると思います。)

$f(a), f(b), f(c)$ の符号が Get でき、自ずと位置関係(大小関係)も把握できます。

(2) $y = |f(x)|$ のグラフは $y < 0$ の部分を x 軸について折り返してできるグラフであるため



というような概形になり、そうするとこの値が気になります。

つまり、 $y = f(x)$ の軸に興味がいっわけです。

軸を出そうとなると、 $f(x)$ については展開して平方完成をせざるをえません。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \\ &= 3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + ab + bc + ca - \frac{(a+b+c)^2}{3} \end{aligned}$$

となりますから、最大値の候補としては

$$f(a), f(c), \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right|$$

ということになり、あとはこれらの大小を丁寧に調べていきます。

【解答】

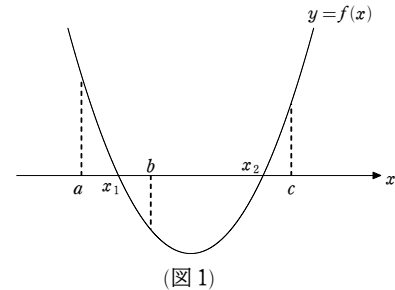
(1) $f(x) = (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + (x-a)(x-b)$ とおく。

$$f(a) = (a-b)(a-c) > 0 \quad (\because \text{条件 } a < b < c)$$

$$f(b) = (b-c)(b-a) < 0 \quad (\because \text{条件 } a < b < c)$$

$$f(c) = (c-a)(c-b) > 0 \quad (\because \text{条件 } a < b < c)$$

ゆえに、 $y = f(x)$ のグラフは以下の(図1)のようになる。

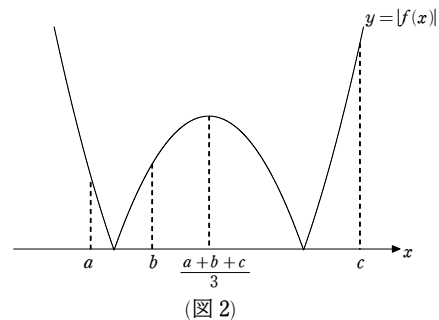


したがって、 $a < x_1 < b < x_2 < c$... 罫

(2) $y = |f(x)|$ のグラフは $y = f(x)$ のグラフの $y < 0$ の部分を x 軸について折り返してできるグラフである。

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca \\ &= 3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2 + ab + bc + ca - \frac{(a+b+c)^2}{3} \end{aligned}$$

より、 $y = f(x)$ の軸は $x = \frac{a+b+c}{3}$ であることに注意すると以下の(図2)のようになる。



$y = |f(x)|$ の最大値の候補としては

$$f(a), f(c), \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right|$$

であり、これらの中の最大値を求めればよい。

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &= (c-a)(c-b) - (a-b)(a-c) \\ &= (c-a)\{(c-b) + (a-b)\} \\ &= (c-a)(c+a-2b) \end{aligned}$$

であり、条件 $a < b < c$ より、 $c-a > 0$ であることから

$$\begin{cases} c+a-2b > 0, \text{ すなわち } b < \frac{a+c}{2} \text{ のとき } f(c) > f(a) \\ c+a-2b = 0, \text{ すなわち } b = \frac{a+c}{2} \text{ のとき } f(c) = f(a) \quad \dots (*) \\ c+a-2b < 0, \text{ すなわち } b > \frac{a+c}{2} \text{ のとき } f(c) < f(a) \end{cases}$$

また,

$$\begin{aligned} \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| &= \left| ab+bc+ca - \frac{(a+b+c)^2}{3} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \{ (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) \} \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} (a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2a^2+2b^2+2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) \right| \\ &= \left| \frac{1}{6} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \right| \\ &= \frac{1}{6} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} \end{aligned}$$

[1] $b < \frac{a+c}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} &< \frac{1}{6} \{ (c-a)^2 + (c-a)^2 + (c-a)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (c-a)^2 \\ &= (c-a) \left(c - \frac{a+c}{2} \right) \\ &< (c-a)(c-b) \\ &= f(c) \end{aligned}$$

$$\text{つまり, } \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| < f(c)$$

(*) より, $f(a) < f(c)$ であることも考えると,

$$f(a), f(c), \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| \text{ の中で最大なのは } f(c)$$

[2] $b = \frac{a+c}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} &< \frac{1}{6} \{ (c-a)^2 + (c-a)^2 + (c-a)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (c-a)^2 \\ &= (c-a) \left(c - \frac{a+c}{2} \right) \\ &= (c-a)(c-b) \\ &= f(c) \end{aligned}$$

$$\text{つまり, } \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| < f(c)$$

(*) より, $f(a) = f(c)$ であることも考えると

$$f(a), f(c), \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| \text{ の中で最大なのは } f(c) (=f(a))$$

[3] $b > \frac{a+c}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} &< \frac{1}{6} \{ (c-a)^2 + (c-a)^2 + (c-a)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (c-a)^2 \\ &= (c-a) \left(\frac{a+c}{2} - a \right) \\ &< (c-a)(b-a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

$$\text{つまり, } \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| < f(a)$$

(*) より, $f(c) < f(a)$ であることも考えると,

$$f(a), f(c), \left| f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \right| \text{ の中で最大なのは } f(a)$$

なお, [2] のときの最大値は $f(c)$ とも $f(a)$ とも言えるため, [2] の結果は [1], [3] のどちらの結果に含めてもよい。

以上から, $y = |f(x)|$ の最大値は

$$\begin{cases} b \leq \frac{a+c}{2} \text{ のとき } (c-a)(c-b) \\ b \geq \frac{a+c}{2} \text{ のとき } (a-b)(a-c) \end{cases} \dots \text{ 圏}$$

【総括】

(1) は教科書傍用問題集などにもよく載っており, 単元学習段階では発展的扱いをされていますが, 難関大受験生にとっては難なくこなしたいところです。

(2) も「何かうまい手がありそう」という気を掻き立ててきますが, 軸の情報が必要になった時点で展開せざるを得ません。

うまくできそうな誘惑はありますが, 試験場では下手に恰好をつけずに地道に調べ上げる路線で走り切るのが賢明です。

なお, 解答の中には少々アクロバティックに思える式変形が登場するので走り切るとなってもそれなりのスタミナが必要です。

以下, 解答中の式変形についての補足を述べておきます。

<補足1>

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) \geq 0$ であることは常識にしましょう。

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

という恒等式は最初こそテックしているように見えますが、学習している人からすれば当たり前レベルと言えなければならない基本です。

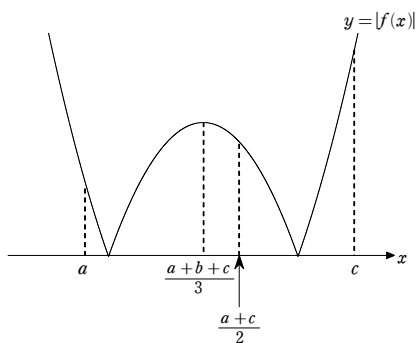
<補足2>

【解答】中の場合分け[1]のときの評価について、テックしているように見えるかもしれませんが。

$b < \frac{a+c}{2}$ であるときは、

$$\begin{aligned} \frac{a+c}{2} - \frac{a+b+c}{3} &= \frac{1}{6}\{3(a+c)-2(a+b+c)\} \\ &= \frac{1}{6}(a+c-2b) > 0 \end{aligned}$$

ですから



というように、偏り的に $f(c)$ の方で最大であることが予想されます。

【解答】中の

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} &< \frac{1}{6}\{(c-a)^2+(c-a)^2+(c-a)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(c-a)^2 \end{aligned}$$

は、ここから、 $\frac{1}{2}(c-a)^2 < f(c)$ 、つまり、 $\frac{1}{2}(c-a)^2 < (c-a)(c-b)$ を示したいわけです。

さらに言えば、 $\frac{1}{2}(c-a) < c-b$ となる根拠を探せばよく、この不等式は

$b < \frac{a+c}{2}$ であり、場合分けの前提条件から従います。

そうなってくると、 $\frac{1}{2}(c-a)^2 = \frac{1}{2}(c-a)(c-a)$

$$= (c-a)\left(c - \frac{a+c}{2}\right)$$

最終的に
 $<(c-a)(c-b)>$
という形でおさえない

と見たくなるわけで、解答のように式変形しているわけです。