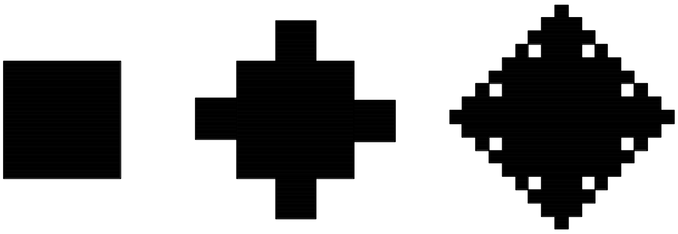
　1 辺の長さが 1 の正方形 R_0 が 1 秒毎に R_1，R_2，…… と大きくなる。ここで，R_n は R_{n-1} の各辺の 3 等分点を頂点にもつ正方形を各辺の外側に付け加えてできる図形である。ただし，一度できたすきまの中には付け加えない。

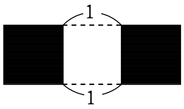


R_0　　R_1　　R_2

(1) R_{n-1} から R_n ができるときに増えるすきまの個数を求めよ。

(2) R_n に含まれるすきまの面積を S_n とする。$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

(3) 1 辺の長さが 1 の正方形 2 つを距離 1 だけ離して下図のようにおき，それぞれを上のように大きくしていくと，何秒後かに 2 つの図形はぶつかるだろうか。理由を付けて答えよ。



＜ '92 信州大 ＞

【戦略】

(1) **言わば「L 字部分」から隙間が生じるため，R_{n-1} に含まれる L 字部分の個数を求めればよいわけです。**

そこで，R_n に含まれる L 字部分の個数を a_n などとおき，漸化式を立てていきます。

基本的には R_{n-1} の L 字部分 1 つから，新たに 3 つの L 字部分が生じます。

ただし，一番外側の辺から 2 本の L 字部分が生じるため，上下左右あわせて 8 本の L 字部分も生じることを忘れないようにしましょう。

これより，$a_n=3a_{n-1}+8$ というオーソドックスな漸化式が立ちます。

(2) **R_{n-1} から R_n に変化する際に新たに生じる部分の面積は，1 辺の長さが $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ の正方形で，その個数は (1) から得られています。**

これにより，$S_n=S_{n-1}+(\text{増加分の面積})$ という階差型の漸化式が立ちます。

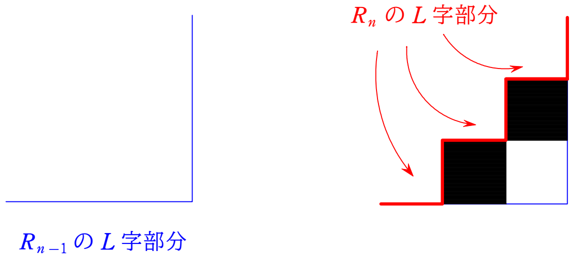
(3) **R_{k-1} から R_k に変化する際，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\times 2$ だけ距離が縮まることになります。**

つまり，$d_n=1-\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^k 2\right\}$ というのが 2 つの図形の距離です。

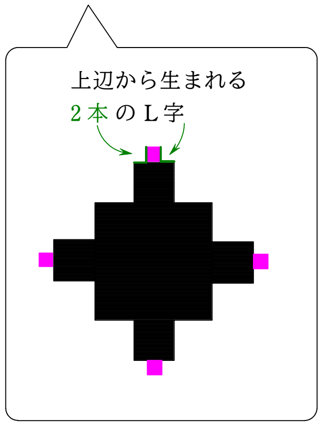
ぶつかるかどうかは $\lim\limits_{n\to\infty} d_n$ にかかってきますので，それを調べればよいでしょう。

【解答】

(1) R_n の L 字部分の本数を a_n とする。



また一番外側の辺から $2\times4=8$【本】 の L 字部分ができる。



よって，$a_n=3a_{n-1}+8$　$(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$（$a_0=0$，$a_1=8$）

これは，$a_n+4=3(a_{n-1}+4)$ と変形できる。

ゆえに，

$$\begin{aligned} a_n+4&=(a_0+4)\cdot3^n \\ &=4\cdot3^n \end{aligned}$$

したがって，$a_n=4(3^n-1)$

また，R_{n-1} の L 字部分 1 個から，R_n の隙間が 1 個できるため求める隙間の個数は，R_{n-1} の L 字部分の個数，すなわち a_{n-1} に等しく

$$a_{n-1}=4(3^{n-1}-1)\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

よって，R_{n-1} から R_n ができるときに増える隙間の個数は
$4(3^{n-1}-1)$【個】…答

(2) R_{n-1} から R_n ができるときに増える部分は1辺の長さが $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ の正方形であるため

$$S_n=S_{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}\times a_{n-1}$$

$$\begin{aligned}S_n-S_{n-1}&=4\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^n(3^{n-1}-1)\\&=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n-4\left(\frac{1}{9}\right)^n\end{aligned}$$

$n\to\infty$ のときを考えるので，$n\geqq 1$ で考えてよく，このとき

$$\begin{aligned}S_n&=S_0+\sum_{k=1}^{n}(S_k-S_{k-1})\\&=0+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^k-4\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}\\&=\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-\frac{4}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\frac{1}{9}}\end{aligned}$$

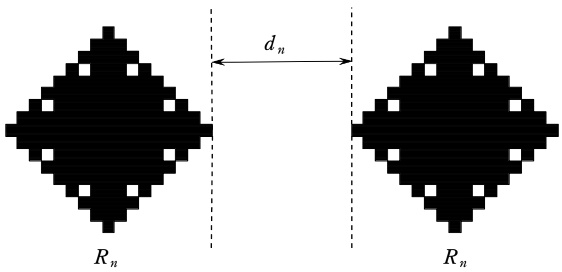
よって，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}-\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}\\&=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{9}{8}\\&=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{6}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3) R_{k-1} から R_k に変化するごとに，この図形同士の距離は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^k\times 2$$

だけ接近する。



上の図のように d_n を定めると

$$\begin{aligned}d_n&=1-\sum_{k=1}^{n}\left\{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}\\&=1-\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\&=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\\&=\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty}d_n=0$ であるため，この2つの図形は限りなく近づいていくがぶつかることはない。… 答

【総括】

例題のコッホ雪片では正三角形を外側に作っていきましたが，

正方形にするとどうでしょう

という趣旨の問題でした。

今回は追加する図形がぶつかることがあるため，隙間が生じましたが，そのあたりをほのめかしながら丁寧に問題が設計されていたように思います。