1 辺の長さが a の正三角形 D_0 から出発して，多角形

$$D_1,\ D_2,\ \cdots\cdots,\ D_n,\ \cdots\cdots$$

を次のように定める。

(i)　AB を D_{n-1} の 1 辺とする。辺 AB を 3 等分し，その分点を A に近い方から P，Q とする。

(ii)　PQ を 1 辺とする正三角形 PQR を D_{n-1} の外側に作る。

(iii)　辺 AB を折れ線 APRQB でおき換える。

D_{n-1} のすべての辺に対して (i) ～ (iii) の操作を行って得られる多角形を D_n とする。

(1)　D_n の周の長さ L_n を a と n で表せ。

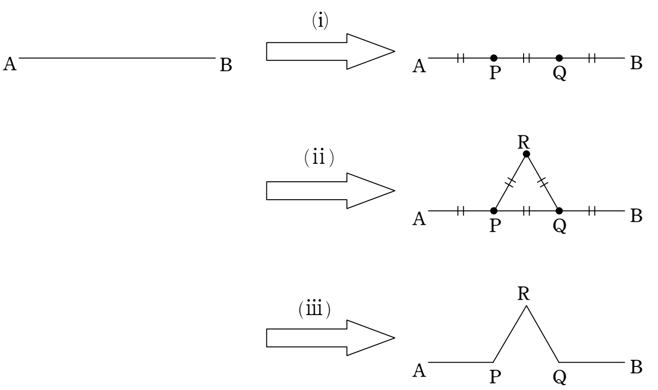
(2)　D_n の面積 S_n を a と n で表せ。

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

＜ ’10 北海道大 ＞

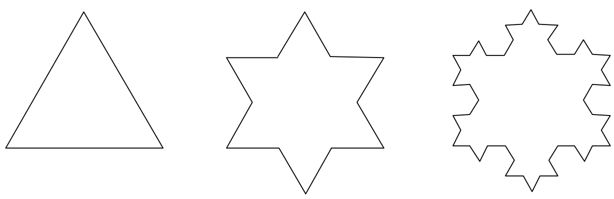
【戦略】

操作 (i) ～ (iii) をイメージしてみると



というイメージです。

D_0，D_1，D_2，… **のイメージは**



D_0　　D_1　　D_2

と，変化していきます。

(1)　D_n **の 1 辺の長さを** a_n，**辺の本数を** b_n **と設定します。**

D_{n+1} **の 1 辺の長さ** a_{n+1} **は** $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$ **であり，辺の本数** b_{n+1} **は 1 本の辺が，4 本の折れ線に置き換わることから，** $b_{n+1}=4b_n$ **となります。**

したがって， a_n，b_n **は等比数列であり，** $\begin{cases} a_n=a\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \\ b_n=3\cdot 4^n \end{cases}$ **を得ます。**

$L_n=a_n\cdot b_n$ **であるため，解決します。**

(2)　D_{n+1} **を作る際に，** D_n **にどれだけ追加されたかを考えます。**

追加分の面積は 1 辺の長さが a_{n+1} **の正三角形が** b_n **個分です。**

したがって， $S_{n+1}=S_n+\left\{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}a_n\right)\left(\dfrac{1}{3}a_n\right)\sin\dfrac{\pi}{3}\right\}\cdot b_n$

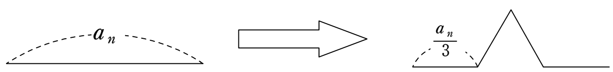
という漸化式を得て，階差数列の処理を経由して S_n **が求められます。**

(3)　S_n **が Get できていればボーナス問題です。**

【解答】

(1)　D_n の $\begin{cases} 1\text{ 辺の長さを } a_n \\ \text{辺の本数を } b_n \end{cases}$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ とする。

（ただし，$a_0=a$，$b_0=3$）



この図形の作り方の規則から，$\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n \\ b_{n+1}=4b_n \end{cases}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

これより，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ は等比数列であり

$$a_n=a_0\left(\frac{1}{3}\right)^n=a\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$b_n=b_0\cdot 4^n=3\cdot 4^n$$

$L_n=a_nb_n$ であるため，

$$L_n=a\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdot 3\cdot 4^n$$
$$=3a\left(\frac{4}{3}\right)^n \cdots 答$$

(2)　D_n から D_{n+1} を作るときに追加される部分の面積は

1 辺の長さが $a_{n+1}\left(=\frac{1}{3}a_n\right)$ の正三角形 b_n 個分の面積

であるため

$$\begin{aligned}S_{n+1}&=S_n+\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a_n\right)\left(\frac{1}{3}a_n\right)\sin\frac{\pi}{3}\right\}\cdot b_n\\&=S_n+\left\{\frac{1}{18}a_n{}^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\cdot b_n\\&=S_n+\left\{\frac{\sqrt{3}}{36}a^2\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}\cdot 3\cdot 4^n\\&=S_n+\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^n\end{aligned}$$

$S_{n+1}-S_n=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^n$　$(n=0,1,2,\cdots\cdots)$ を得る。

$n=1,2,3,\cdots\cdots$ に対して

$$\begin{aligned}S_1-S_0&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\\S_2-S_1&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)\\S_3-S_2&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^2\\S_4-S_3&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^3\\&\vdots\\S_n-S_{n-1}&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

辺々加えると，
$$\begin{aligned}S_n-S_0&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2\cdot\frac{9}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

$S_0=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ なので

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2+\frac{3\sqrt{3}}{20}a^2\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2\left[5+3\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\right]\\&=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2\left\{8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\quad(n=1,2,\cdots)\cdots①\end{aligned}$$

この式に $n=0$ を代入すると，$S_0=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2\cdot(8-3)=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

となり，① は $n=0$ のときも正しい結果を与える。

ゆえに，$n=0,1,2,\cdots$ に対して，

$$S_n=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2\left\{8-3\left(\frac{4}{9}\right)^n\right\}\cdots\text{答}$$

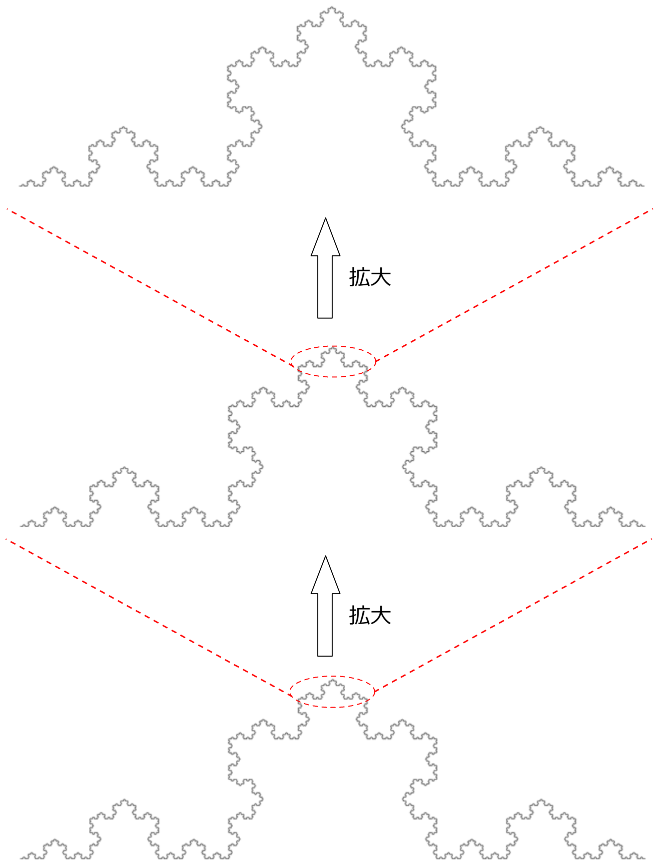
(3)　$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{20}a^2(8-0)=\frac{2\sqrt{3}}{5}a^2\cdots\text{答}$

【総括】

今回の図形は「コッホ雪片」と呼ばれる有名な図形です。

$\lim_{n\to\infty}L_n=\infty$ と周の長さは発散しますが，$\lim_{n\to\infty}S_n$ は有限確定値に収束するという不思議な形で，無限に長い周長をもつ図形が有限なエリアに収められるという，ある意味価値のある結果です。

なお，1 本の線分に対して，今回の操作 (i) ～ (iii) を繰り返して得られる図形はコッホ曲線と呼ばれ，



というように，拡大しても拡大しても同様の構造が現れるという

「自己相似構造」

をもっており，フラクタル図形と呼ばれます。

すごくざっくり言えば「マトリョーシカ」のような感じでしょうか。