tan についての不等式証明【相加平均と相乗平均の間】

実数 a，b $\left(0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4},\ 0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}\right)$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sqrt{\tan a \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}(\tan a + \tan b)$$

＜ ’91 京都大 ＞

【戦略 1】

右側の不等式は，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ という形をしており，学習が進んでおり，内容も定着しているのであれば，グラフの凸性を利用する方針をインスピレーションしたいところです。

一方，左側の不等式については，右側の不等式の結果を使うことを狙っていきます。

a，b の範囲的に，今回示すべき不等式に登場する各式の値は 0 以上であるため，結局は

$$\tan a \tan b \leqq \tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

を示せばよいことになります。

インスピレーションしたいのは $\tan$ の加法定理

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

であり，これを目標の $\tan a \tan b =$　という形にしたいので

$$\tan a \tan b = 1 - \frac{\tan a + \tan b}{\tan(a+b)}$$

と見ます。

ここで 前半（右側の不等式）の結果である，$\tan a + \tan b \geqq 2\tan\dfrac{a+b}{2}$

が使えるため，$\tan a \tan b \leqq 1 - \dfrac{2\tan\dfrac{a+b}{2}}{\tan(a+b)}$ …①

そうなってくると，① の分母については

$$\tan(a+b) = \tan\left(2 \cdot \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$$

と見たくなります。これを ① に代入することで

$$\tan a \tan b \leqq 1 - \frac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\dfrac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}} = \tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

となり，辺々 0 以上の値であるため，

$$\sqrt{\tan a \tan b} \leqq \tan\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

が成立することになり，証明完了です。

【解 1】

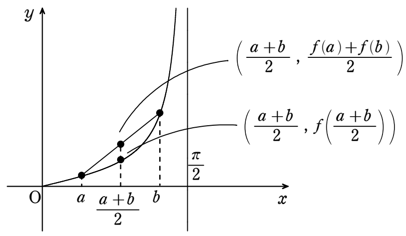
＜ $\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{1}{2}(\tan a + \tan b)$ の証明について＞

$f(x) = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}\right)$ において

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$f''(x) = -2(\cos x)^{-3} \cdot (-\sin x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \geqq 0$$

ゆえに，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲において，$f(x)$ は下に凸の関数である。



したがって，$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

すなわち，$\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{1}{2}(\tan a + \tan b)$ …$(*)$ が成り立つ。

＜ $\sqrt{\tan a \tan b} \leqq \tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ の証明について＞

$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ であるため

$$1 - \tan a \tan b = \frac{\tan a + \tan b}{\tan(a+b)}$$

すなわち

$$\tan a \tan b = 1 - \frac{\tan a + \tan b}{\tan(a+b)} \leqq 1 - \frac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\tan(a+b)} \quad (\because (*)) \quad \cdots ①$$

また，

$$\tan(a+b) = \tan\left(2 \cdot \frac{a+b}{2}\right) = \frac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すれば

$$\tan a \tan b \leqq 1 - \frac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\dfrac{2\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}} = \tan^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

今，$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}$，$0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}$ という条件から，$0 \leqq \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{\pi}{4}$ なので，
不等式の両辺は 0 以上の値である。

したがって，$\sqrt{\tan a \tan b} \leqq \tan \dfrac{a+b}{2}$ が成り立つ。

以上から，$\sqrt{\tan a \tan b} \leqq \tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{1}{2}(\tan a + \tan b)$ が成り立つ。

【戦略 2】

右側の不等式について，凸性の利用が思いつかなかった場合の解法は，予選決勝法でしょう。

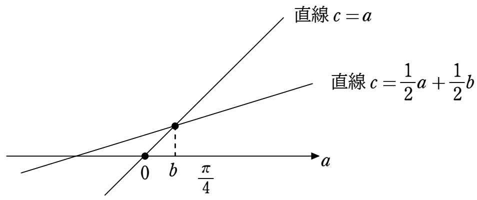
【解 2】～右側の不等式について～

$f(a) = \dfrac{1}{2}(\tan a + \tan b) - \tan \dfrac{a+b}{2}$ とおく。

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^2 \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 a} - \frac{1}{\cos^2 \frac{a+b}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(1+\tan^2 a) - \left(1+\tan^2 \frac{a+b}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\tan a + \tan \frac{a+b}{2}\right)\left(\tan a - \tan \frac{a+b}{2}\right)
\end{aligned}$$

$0 \leqq a < \dfrac{\pi}{4}$，$0 \leqq b < \dfrac{\pi}{4}$ という条件から，$0 \leqq \dfrac{a+b}{2} < \dfrac{\pi}{4}$

この範囲で $f'(a)$ の符号は a，$\dfrac{a+b}{2}$ の大小関係によって決まる。



a	0	$\cdots$	b	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{4}\right)$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘	0	↗	

したがって，b を固定すると，$a=b$ のとき $f(a)$ は最小となり
$$f(a) \geqq f(b) \ (=0)$$

よって，$\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqq \dfrac{1}{2}(\tan a + \tan b)$ が成り立つ。

【戦略 3】

示すべき左側の不等式を

$$(\tan a\tan b)^{\frac{1}{2}}\leqq\tan\frac{a+b}{2}$$

$$\log(\tan a\tan b)^{\frac{1}{2}}\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\log(\tan a\tan b)\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\frac{\log(\tan a)+\log(\tan b)}{2}\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

と log をとってみると，左側の不等式についても凸性の利用を考えたくなります。

解答は天下り的に記述します。

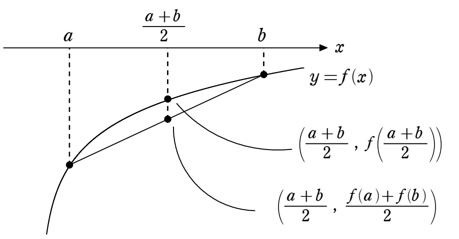
【解 3】～ 左側の不等式について ～

$f(x)=\log(\tan x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$ とおく。

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}\ \left(=2(\sin 2x)^{-1}\right)$$

$$\begin{aligned}f''(x)&=-2(\sin 2x)^{-2}\cdot(2\cos 2x)\\&=-\frac{4\cos 2x}{(\sin 2x)^2}\\&<0\end{aligned}$$

よって，$0<x<\frac{\pi}{4}$ において，$f(x)$ は上に凸である。



したがって，$0<a<\frac{\pi}{4}$，$0<b<\frac{\pi}{4}$ に対して，

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\leqq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

すなわち，

$$\frac{\log(\tan a)+\log(\tan b)}{2}\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

が成立する。

これより

$$\frac{1}{2}\log(\tan a\tan b)\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

$$\log(\tan a\tan b)^{\frac{1}{2}}\leqq\log\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)$$

$$(\tan a\tan b)^{\frac{1}{2}}\leqq\tan\frac{a+b}{2}$$

よって，$0<a<\frac{\pi}{4}$，$0<b<\frac{\pi}{4}$ のとき

$$\sqrt{\tan a\tan b}\leqq\tan\frac{a+b}{2}\quad\cdots(☆)$$

が成立する。

$a=0$ のときは $\begin{cases}\sqrt{\tan a\tan b}=0\\ \tan\frac{a+b}{2}=\tan\frac{b}{2}\end{cases}$ であり (☆) は成立する。

$b=0$ のときは $\begin{cases}\sqrt{\tan a\tan b}=0\\ \tan\frac{a+b}{2}=\tan\frac{a}{2}\end{cases}$ であり (☆) は成立する

以上から，$0\leqq a<\frac{\pi}{4}$，$0\leqq b<\frac{\pi}{4}$ で

$$\sqrt{\tan a\tan b}\leqq\tan\frac{a+b}{2}$$

が成立する。

【戦略 4】

加法定理や半角・倍角公式などの公式を使う際，$\dfrac{a+b}{2}$ という角度が鬱陶しいことこの上ありません。

そこで，$\dfrac{a+b}{2}=\alpha$ とおいてしまい，$\dfrac{a-b}{2}=\beta$ と設定することで

$$a=\alpha+\beta,\ b=\alpha-\beta$$

と，目に優しい形で加法定理を使うことができます。

これにより，愚直に差を取るという方針が現実味を帯びてくるでしょう。

【解 4】

示すべき不等式の対称性から，$0\leqq b\leqq a<\dfrac{\pi}{4}$ として考えても一般性を失わない。

$\dfrac{a+b}{2}=\alpha$，$\dfrac{a-b}{2}=\beta$ とおくと，$\begin{cases} a=\alpha+\beta \\ b=\alpha-\beta \end{cases}$

また，$0\leqq\alpha-\beta\leqq\alpha+\beta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0\leqq\beta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

ゆえに，$0\leqq\beta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ に対して

$$\sqrt{\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}\leqq\tan\alpha\leqq\frac{1}{2}\{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)\}$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)\}-\tan\alpha \\
&=\frac{1}{2}\{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)-2\tan\alpha\} \\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}+\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}-2\tan\alpha\right\} \\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\tan\alpha\,(1+\tan^2\beta)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}-2\tan\alpha\right\} \\
&=\frac{1}{2}\left\{\frac{2\tan\alpha\,\{1+\tan^2\beta-(1-\tan^2\alpha\tan^2\beta)\}}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta}\right\} \\
&=\frac{\tan\alpha\tan^2\beta\,(1+\tan^2\alpha)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta} \\
&\geqq 0\quad\left(\because\ 0\leqq\beta\leqq\alpha<\frac{\pi}{4}\ \text{より，}\begin{cases}0\leqq\tan\alpha<1\\0\leqq\tan\beta<1\end{cases}\right)
\end{aligned}$$

よって，$\tan\alpha\leqq\dfrac{1}{2}\{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)\}$ が成り立つ。

一方

$$\begin{aligned}
&\tan^2\alpha-\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta) \\
&=\tan^2\alpha-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdot\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \\
&=\tan^2\alpha-\frac{\tan^2\alpha-\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta} \\
&=\frac{\tan^2\alpha-\tan^4\alpha\tan^2\beta-\tan^2\alpha+\tan^2\beta}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta} \\
&=\frac{\tan^2\beta\,(1-\tan^4\alpha)}{1-\tan^2\alpha\tan^2\beta} \\
&\geqq 0\quad\left(\because\ 0\leqq\beta\leqq\alpha<\frac{\pi}{4}\ \text{より，}\begin{cases}0\leqq\tan\alpha<1\\0\leqq\tan\beta<1\end{cases}\right)
\end{aligned}$$

よって，$\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)\leqq\tan^2\alpha$ が示され，辺々 0 以上の値であるため，

$$\sqrt{\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}\leqq\tan\alpha$$

が成り立つ。

以上から，$0\leqq\beta\leqq\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ に対して

$$\sqrt{\tan(\alpha+\beta)\tan(\alpha-\beta)}\leqq\tan\alpha\leqq\frac{1}{2}\{\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)\}$$

が成り立ち，題意は示された。

【総括】

京大受験生であれば，少なくとも右側の $\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqq\dfrac{1}{2}(\tan a+\tan b)$

については

・形から凸性の利用を考える

・予選決勝法

いずれにしても捌ききりたいレベルと言ってよいでしょう。

左側の $\sqrt{\tan a\tan b}\leqq\tan\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ が難しく，予選決勝法で行こうと思っても

$$f(a)=\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)^2-\tan a\tan b\ \text{に対し，}$$

$$\begin{aligned}
f'(a)&=2\left(\tan\frac{a+b}{2}\right)\cdot\frac{1}{\cos^2\dfrac{a+b}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\tan b\cdot\frac{1}{\cos^2 a} \\
&=\tan\frac{a+b}{2}\left(1+\tan^2\frac{a+b}{2}\right)-\tan b\,(1+\tan^2 a)
\end{aligned}$$

となり，このあたりでテンションが下がっていくと思います。

いずれの解法もそれなりに切れ味が要求され，脳みそを使います。