３文字の対称式の値

３次方程式 $x^3-2x^2+3x-4=0$ の３つの解を複素数の範囲で考え，それらを α，β，γ とする。このとき，$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ の値と $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ の値をそれぞれ求めよ。

＜ ’03 慶應義塾大 ＞

【戦略１】

α，β，γ が $x^3-2x^2+3x-4=0$ という３次方程式の解として与えられていることから，解と係数の関係

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\\ \alpha\beta\gamma=4\end{cases}$$

をもとに考えていくことになります。

ひとまず，次数の低い

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

を計算していきます。

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ については

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

と，全体の２乗から余分なものを除くという定番の式変形をします。

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ については

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

という有名な因数分解を利用すればよいでしょう。

これにより，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2$ を得ます。

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ については，

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$$

の利用が思いつきやすいでしょう。

$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$ は

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=3^2-2\cdot4\cdot2\\&=-7\end{aligned}$$

なので，

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(-2)^2-2\cdot(-7)=18$$

となります。

$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ については $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ から不必要な

$$\alpha^3\beta^2+\alpha^3\gamma^2+\beta^3\alpha^2+\beta^3\gamma^2+\gamma^3\alpha^2+\gamma^3\beta^2$$

を除いていきます。

これは $\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\beta^2\gamma^2(\beta+\gamma)+\gamma^2\alpha^2(\gamma+\alpha)$ なので，$\alpha+\beta+\gamma=2$ を用いると

$$\begin{aligned}&\alpha^2\beta^2(2-\gamma)+\beta^2\gamma^2(2-\alpha)+\gamma^2\alpha^2(2-\beta)\\&=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)-\alpha\beta\gamma(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\end{aligned}$$

と計算できます。

【解１】

解と係数の関係から $\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=2 & \cdots①\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3 & \cdots②\\ \alpha\beta\gamma=4 & \cdots③\end{cases}$ である。

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ より

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2&=2^2-2\cdot3\\&=-2 \qquad \cdots④\end{aligned}$$

$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$ より

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\cdot4=2\cdot(-2-3)\ (\because ②,③,④)$$

すなわち，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2$ …⑤

さて

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2) \quad \cdots(*)$$

ここで，

$$\begin{aligned}\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)\\&=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\&=9-2\cdot4\cdot2\ (\because ①,②,③)\\&=-7 \quad \cdots⑥\end{aligned}$$

$(*)$ 及び ④，⑥ より，

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(-2)^2-2\cdot(-7)\\&=18\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5+\gamma^5&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\&\qquad-(\alpha^3\beta^2+\alpha^3\gamma^2+\beta^3\alpha^2+\beta^3\gamma^2+\gamma^3\alpha^2+\gamma^3\beta^2)\\&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\&\qquad-\{\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)+\beta^2\gamma^2(\beta+\gamma)+\gamma^2\alpha^2(\gamma+\alpha)\}\\&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\&\qquad-\{\alpha^2\beta^2(2-\gamma)+\beta^2\gamma^2(2-\alpha)+\gamma^2\alpha^2(2-\beta)\}\\&\qquad(\because ①)\\&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\&\qquad-\{2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)-\alpha\beta\gamma(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}\\&=2\cdot(-2)-\{2\cdot(-7)-4\cdot3\}\\&=22\end{aligned}$$

以上から，

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=18 \cdots 答$$
$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=22 \cdots 答$$

【戦略 2】

$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ については

$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

と，少々テクった式変形が見えれば，話が早いです。

【解 2】 $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ についての部分的別解

（$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2$，$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2$の導出については【解 1】と同様）

$$
\begin{aligned}
&\alpha^5+\beta^5+\gamma^5\\
&=(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=2\cdot(-2)-2\cdot(-7)+4\cdot3\\
&=22
\end{aligned}
$$

【戦略 3】

元々 α，β，γ が 3 次方程式 $x^3-2x^2+3x-4=0$ の解であることから

$$
\begin{cases}
\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\
\beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\
\gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0
\end{cases}
$$

を満たすことを利用します。

α^4，β^4，γ^4 を登場させたいのであれば，それぞれの両辺に α，β，γ をかけることで

$$
\begin{cases}
\alpha^4-2\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha=0\\
\beta^4-2\beta^3+3\beta^2-4\beta=0\\
\gamma^4-2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma=0
\end{cases}
$$

を得て，辺々加えれば，

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-4(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

を得て，解決です。

$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ についても全く同様のシナリオです。

【解 3】部分的別解

（$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2$ の導出については【解 1】と同様）

α，β，γ は $x^3-2x^2+3x-4=0$ の解であるため

$$
\begin{cases}
\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\
\beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\
\gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0
\end{cases}
$$

よって，$\begin{cases}
\alpha^4-2\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha=0\\
\beta^4-2\beta^3+3\beta^2-4\beta=0\\
\gamma^4-2\gamma^3+3\gamma^2-4\gamma=0
\end{cases}$

辺々加えると

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-4(\alpha+\beta+\gamma)=0$$

これより，

$$
\begin{aligned}
\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+4(\alpha+\beta+\gamma)\\
&=2\cdot2-3\cdot(-2)+4\cdot2\\
&=18 \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

また，$\begin{cases}
\alpha^5-2\alpha^4+3\alpha^3-4\alpha^2=0\\
\beta^5-2\beta^4+3\beta^3-4\beta^2=0\\
\gamma^5-2\gamma^4+3\gamma^3-4\gamma^2=0
\end{cases}$

辺々加えると

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5-2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)-4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=0$$

これより，

$$
\begin{aligned}
\alpha^5+\beta^5+\gamma^5&=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)-3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\\
&=2\cdot18-3\cdot2+4\cdot(-2)\\
&=22 \cdots \text{答}
\end{aligned}
$$

【戦略 4】

【戦略 3】とほぼ同様なのですが，一般的に $s_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ として漸化式を作ってしまうというのも一つの手です。

【解 4】

（$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=2$ の導出については【解 1】と同様）

$s_n=\alpha^n+\beta^n+\gamma^n$ とする。

α，β，γ は $x^3-2x^2+3x-4=0$ の解であるため

$$\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\ \beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\ \gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0\end{cases}$$

これより，$\begin{cases}\alpha^{n+3}-2\alpha^{n+2}+3\alpha^{n+1}-4\alpha^n=0\\ \beta^{n+3}-2\beta^{n+2}+3\beta^{n+1}-4\beta^n=0\\ \gamma^{n+3}-2\gamma^{n+2}+3\gamma^{n+1}-4\gamma^n=0\end{cases}$

辺々加えることで $s_{n+3}-2s_{n+2}+3s_{n+1}-4s_n=0$，すなわち

$$s_{n+3}=2s_{n+2}-3s_{n+1}+4s_n$$

を得る。

$s_1=2$，$s_2=-2$，$s_3=2$ であるため

$$\begin{aligned}s_4&=2s_3-3s_2+4s_1\\&=2\cdot2-3\cdot(-2)+4\cdot2\\&=18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_5&=2s_4-3s_3+4s_2\\&=2\cdot18-3\cdot2+4\cdot(-2)\\&=22\end{aligned}$$

よって

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=18 \cdots 答$$
$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=22 \cdots 答$$

【戦略 5】

$\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\ \beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\ \gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0\end{cases}$ **から，** $\begin{cases}\alpha^3=2\alpha^2-3\alpha+4\\ \beta^3=2\beta^2-3\beta+4\\ \gamma^3=2\gamma^2-3\gamma+4\end{cases}$ **が成り立ちます。**

これは α^3，β^3，γ^3 という 3 次の項が 2 次式として表せることを意味し ,次数を下げることができるということを意味します。

【解 5】

（$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2$ の導出については【解 1】と同様）

$\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\ \beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\ \gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0\end{cases}$ から，

$$\begin{cases}\alpha^3=2\alpha^2-3\alpha+4\\ \beta^3=2\beta^2-3\beta+4\\ \gamma^3=2\gamma^2-3\gamma+4\end{cases}$$

が成り立つ。

$$\begin{aligned}\alpha^4&=\alpha\cdot\alpha^3\\&=\alpha(2\alpha^2-3\alpha+4)\\&=2\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha\\&=2(2\alpha^2-3\alpha+4)-3\alpha^2+4\alpha\\&=\alpha^2-2\alpha+8 \cdots(ア)\end{aligned}$$

同様に，$\beta^4=\beta^2-2\beta+8$，$\gamma^4=\gamma^2-2\gamma+8$

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha+\beta+\gamma)+24\\&=-2-2\cdot2+24\\&=18 \cdots 答\end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned}\alpha^5&=\alpha\cdot\alpha^4\\&=\alpha(\alpha^2-2\alpha+8)\ (\because(ア))\\&=\alpha^3-2\alpha^2+8\alpha\\&=(2\alpha^2-3\alpha+4)-2\alpha^2+8\alpha\\&=5\alpha+4\end{aligned}$$

同様に，$\beta^5=5\beta+4$，$\gamma^5=5\gamma+4$

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5+\gamma^5&=5(\alpha+\beta+\gamma)+12\\&=5\cdot2+12\\&=22 \cdots 答\end{aligned}$$

【戦略 6】

高次計算の次数下げの手段一つに，「割り算の活用」という常套手段があります。

x^4 や x^5 を x^3-2x^2+3x-4 で割ったときの商と余りを計算することで

$$x^4=(x^3-2x^2+3x-4)(x+2)+x^2-2x+8$$
$$x^5=(x^3-2x^2+3x-4)(x^2+2x+1)+5x+4$$

という恒等式を得ます。

この恒等式に $x=\alpha$，β をそれぞれ代入すると， $\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\ \beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\ \gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0\end{cases}$ **を満たすことから**

$$\begin{cases}\alpha^4=\alpha^2-2\alpha+8\\ \beta^4=\beta^2-2\beta+8\\ \gamma^4=\gamma^2-2\gamma+8\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha^5=5\alpha+4\\ \beta^5=5\beta+4\\ \gamma^5=5\gamma+4\end{cases}$$

を得て，辺々を加えることで解決します。

【解 6】

$$x^4=(x^3-2x^2+3x-4)(x+2)+x^2-2x+8$$
$$x^5=(x^3-2x^2+3x-4)(x^2+2x+1)+5x+4$$

である。

α，β，γ は $\begin{cases}\alpha^3-2\alpha^2+3\alpha-4=0\\ \beta^3-2\beta^2+3\beta-4=0\\ \gamma^3-2\gamma^2+3\gamma-4=0\end{cases}$ を満たすため

$$\begin{cases}\alpha^4=\alpha^2-2\alpha+8\\ \beta^4=\beta^2-2\beta+8\\ \gamma^4=\gamma^2-2\gamma+8\end{cases},\quad \begin{cases}\alpha^5=5\alpha+4\\ \beta^5=5\beta+4\\ \gamma^5=5\gamma+4\end{cases}$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\alpha^4+\beta^4+\gamma^4&=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\alpha+\beta+\gamma)+24\\&=-2-2\cdot2+24\\&=18\ \cdots 答\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha^5+\beta^5+\gamma^5&=5(\alpha+\beta+\gamma)+12\\&=5\cdot2+12\\&=22\ \cdots 答\end{aligned}$$

【総括】

邪魔のモノを除くという方針が目に付きやすいとは思います。

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$ は $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2$ から邪魔な $2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ を除こうとしてもタカがしれていますが，$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ についてが厄介です。

さすがに $(\alpha+\beta+\gamma)^5$ から色々除いていくというのはやってられないでしょう。

なので，$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ をベースにする部分はいいでしょう。

ただ，邪魔な $\alpha^3\beta^2+\alpha^3\gamma^2+\beta^3\alpha^2+\beta^3\gamma^2+\gamma^3\alpha^2+\gamma^3\beta^2$ の扱いをどうしようか困ってしまった人が多いと思います。

この方針で押し切るとなると【解 1】【解 2】の路線でしょうが，どちらもパッと見える人の方が少ないでしょう。

恐らく「邪魔のモノを取り除こう作戦」で雲行きが怪しくなって「次数下げ」の路線に走るというのが多くの受験生の動きだと思います。

今回様々な解法を考えましたが，$\alpha^6+\beta^6+\gamma^6$，$\alpha^7+\beta^7+\gamma^7$，… と訊かれた場合でも対処できそうなのは【解 4】の漸化式を作る路線でしょうね。