3つの正の整数 a，b，c の最大公約数が1であるとき，次の問いに答えよ。

(1) $a+b+c$，$bc+ca+ab$，abc の最大公約数は1であることを示せ。

(2) $a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数となるような正の整数をすべて求めよ。

＜ ’22 東京工業大 ＞

【戦略】

(1) **最大公約数を G として，** $\begin{cases} a+b+c=G\alpha \\ ab+bc+ca=G\beta \\ abc=G\gamma \end{cases}$ **と表し，$G\geqq 2$ と仮定して矛盾を導く**

または，共通素因数 p をもつと仮定し， $\begin{cases} a+b+c=p\alpha \\ ab+bc+ca=p\beta \\ abc=p\gamma \end{cases}$ **と表し矛盾を導く**

ということが考えられます。

注目すべきは abc という積であり，abc が素数 p の倍数という方がこの後話を進めやすいので，後者を採用します。

(2) **流れから，$a^2+b^2+c^2$ や $a^3+b^3+c^3$ を基本対称式** $\begin{cases} a+b+c \\ ab+bc+ca \\ abc \end{cases}$ **で表すことを考えます。**

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$ **は基本の変形です。**

$a^3+b^3+c^3$ **については**

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$$

という因数分解を利用します。(これについては常識とすべき因数分解公式です。)

$x=a+b+c$，$y=ab+bc+ba$，$z=abc$ **とおきなおすことで**

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=x^2-2y \\ a^3+b^3+c^3=x^3-3xy+3z \end{cases}$$

となり，x，x^2-2y，$x^3-3xy+3z$ の最大公約数を考えればよいことになります。

$\dfrac{x}{G}$，$\dfrac{x^2-2y}{G}$，$\dfrac{x^3-3xy+3z}{G}$ **が全て整数となるような G を考えるわけですが，$\dfrac{x}{G}$ が整数である時点で，**

$$\frac{x}{G},\ \frac{2y}{G},\ \frac{3z}{G}$$

が全て整数となるような G を考えればよいことが分かります。

そうなると，(1) の結果から G としての可能性は，$G=1$，2，3，6 です。

【解答】ではこれをもう少し詰めて明確にしながら記述します。

【解答】

(1) $a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc が共通素因数 p をもつと仮定すると整数 α，β，γ を用いて

$$\begin{cases} a+b+c=p\alpha & \cdots① \\ ab+bc+ca=p\beta & \cdots② \\ abc=p\gamma & \cdots③ \end{cases}$$

と表せる。

③ より，abc が素数 p の倍数であるため，a，b，c のいずれかが素数 p の倍数となる必要がある。

a，b，c に関する対称性から a が p の倍数として，

$a=pA$ （A は整数）

とおく。

このとき，①，② から $\begin{cases} pA+b+c=p\alpha \\ pAb+bc+pAc=p\beta \end{cases}$

すなわち，$\begin{cases} b+c=p(\alpha-A) & \cdots④ \\ bc=p(\beta-Ab-Ac) & \cdots⑤ \end{cases}$

⑤ より bc が素数 p の倍数であるため，b，c のいずれかが素数 p の倍数となる必要がある。

b が p の倍数として $b=pB$ （B は整数）とおくと，④ より

$pB+c=p(\alpha-A)$，すなわち，$c=p(\alpha-A-B)$ で c も p の倍数。

c が p の倍数としても，同様にして④から b も p の倍数。

以上から，a，b，c が全て p の倍数ということになる。

これは a，b，c の最大公約数が1であることに矛盾する。

以上から，$a+b+c$．$ab+bc+ca$，abc は共通素因数をもたず，最大公約数は1である。

(2) $x=a+b+c$，$y=ab+bc+ca$，$z=abc$ とする。

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2&=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &=x^2-2y \end{aligned}$$

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\{a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)\}$

より

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3&=x\{x^2-2y-y\}+3z \\ &=x^3-3xy+3z \end{aligned}$$

x，x^2-2y，$x^3-3xy+3z$ の最大公約数 G を考える。

$$\begin{cases} x=Gm_1 & \cdots(ア) \\ x^2-2y=Gm_2 & \cdots(イ) \\ x^3-3xy+3z=Gm_3 & \cdots(ウ) \end{cases} \quad (m_1,\ m_2,\ m_3 \text{ は整数})$$

と表せ，(ア) を (イ) に代入すれば，$G^2{m_1}^2-2y=Gm_2$

すなわち，$2y=G(G{m_1}^2-m_2)$

(ア) を (ウ) に代入すれば，$G^3{m_1}^3-3Gm_1y+3z=Gm_3$

すなわち $3z=G(m_3-G^2{m_1}^3+3m_1y)$

つまり，求める最大公約数を G とすると

x，$2y$，$3z$ は G の倍数，つまり，$\dfrac{x}{G}$，$\dfrac{2y}{G}$，$\dfrac{3z}{G}$ が整数となる。

G が 5 以上の素因数 P をもつとき，x，y，z がすべて素因数 P をもつことになり，(1) の結果に矛盾する。

したがって，G は $G=2^u\cdot3^v$ (u，v は非負整数) という形に限られる。

このとき，$\dfrac{x}{2^u\cdot3^v}$，$\dfrac{y}{2^{u-1}\cdot3^v}$，$\dfrac{z}{2^u\cdot3^{v-1}}$ が全て整数となる。

$v\geqq2$ とすると，z が素因数 3 をもつ。

一方，$\dfrac{x}{2^u\cdot3^v}$，$\dfrac{y}{2^{u-1}\cdot3^v}$ が整数なので，x，y が素因数 3 をもたなければならない。

これは (1) の結果に矛盾するため，$v=0$，1

また，$u\geqq2$ とすると，y が素因数 2 をもつ。

一方，$\dfrac{x}{2^u\cdot3^v}$，$\dfrac{z}{2^u\cdot3^{v-1}}$ が整数なので，x，z が素因数 2 をもたなければならない。

これは (1) の結果に矛盾するため，$u=0$，1

したがって，u，v の組としてあり得るのは

$$(u,\ v)=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)$$

であり，G としてとり得る値の可能性は

$$G=1,\ 2,\ 3,\ 6$$

である。

実際に

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

$(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=(3,\ 3,\ 3)$ で $G=3$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 2)$ のとき

$(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=(4,\ 6,\ 10)$ で $G=2$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 3)$ のとき

$(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=(5,\ 11,\ 29)$ で $G=1$

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4)$ のとき

$(a+b+c,\ a^2+b^2+c^2,\ a^3+b^3+c^3)=(6,\ 18,\ 66)$ で $G=6$

で，G は 1，2，3，6 の全てになり得る。

以上から，$a+b+c$，$a^2+b^2+c^2$，$a^3+b^3+c^3$ の最大公約数としてあり得る正の整数は

1，2，3，6 …答

【戦略 2】(1) について

$a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc の情報から，a，b，c という個々の情報を取り出すとなると

解と係数の関係

がインスピレーションされます。

【解 2】(1) について

$a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc が共通素因数 p をもつと仮定すると
整数 α，β，γ を用いて

$$\begin{cases} a+b+c=p\alpha & \cdots① \\ ab+bc+ca=p\beta & \cdots② \\ abc=p\gamma & \cdots③ \end{cases}$$

と表せる。

このとき，a，b，c は

$$X^3-p\alpha X^2+p\beta X-p\gamma=0 \ \cdots(*)$$

という X の 3 次方程式の整数解である。

したがって $a^3-p\alpha a^2+p\beta a-p\gamma=0$

すなわち，$a^3=p(\alpha a^2-\beta a+\gamma)$ で，a^3 は素数 p の倍数であるため，a も p の倍数。

同様に b，c も p の倍数で，a，b，c が全て p の倍数となり，a，b，c の最大公約数が 1 であることに矛盾する。

以上から，$a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc は共通素因数をもたず，これらの最大公約数は 1 である。

【総括】

見た目にインパクトがあり，考えたくなる問題です。

最大公約数が 1 ということを「共通素因数をもたない」と否定的に見れば背理法という路線が自然です。

a，b，c の最大公約数が 1 であることに矛盾するという未来を見据えれば

$a+b+c$，$ab+bc+ca$，abc が素数 p の倍数 $\Longrightarrow$ a，b，c も p の倍数

という一本の道が見えてくると思います。

(2) は手なりに登場人物を基本対称式で表そうという気持ちがはたらくはずです。

$\dfrac{x}{G}$，$\dfrac{x^2-2y}{G}$，$\dfrac{x^3-3xy+3z}{G}$ が整数となるとき，$\dfrac{x}{G}$，$\dfrac{2y}{G}$，$\dfrac{3z}{G}$ も整数となるということをスムーズに見抜けるかどうかが山場でしょう。