a，b を正の整数とする。

(1) $c=a+b$，$d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式
$$1<\frac{c^2}{d}\leqq 4$$
が成り立つことを示せ。

(2) a^3+b^3 が素数の整数乗になる a，b を全て求めよ。

＜ '84 東京工業大 ＞

【戦略】

(1) **$d=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}>0$ なので，$d<c^2\leqq 4d$ を示せばよいことになります。**

これについては素直に差を取れば問題ないでしょう。

【解答】では逆算的に記述します。

(2) **(1) との関連を考えれば，もちろん $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ という因数分解が頭をよぎるでしょう。**

つまり，cd が素数の整数乗となるときを考えることになります。

素数の整数乗ということは，素因数を 1 種類しかもたないということであり，c，d がともに素数 p の累乗の形であることを意味します。

$c=p^k$，$d=p^\ell$ と表してしまえば，(1) の出番で
$$1<\frac{p^{2k}}{p^\ell}\leqq 4,\ \text{すなわち，}\ 1<p^{2k-\ell}\leqq 4$$
ということになります。

2，3，4 の中で，(素数)$^{(\text{整数})}$ という形のものは 2^1，2^2，3^1 という 3 種類しかないことから，
$$(p,\ 2k-\ell)=(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$
と限られ，ここから先は個別検証です。

$a+b=p^k$，$(a+b)^2-3ab=2^\ell$ **すなわち，**
$$\begin{cases} a+b=p^k \\ ab=\dfrac{p^{2k}-p^\ell}{3} \end{cases}$$
を得ますから，a，b については解と係数の関係から仕留めればよいでしょう。

【解答】

(1)
$$\begin{aligned} c^2-d&=(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)\\ &=a^2+2ab+b^2-(a^2-ab+b^2)\\ &=3ab\\ &>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4d-c^2&=4(a^2-ab+b^2)-(a+b)^2\\ &=4(a^2-ab+b^2)-(a^2+2ab+b^2)\\ &=3a^2-6ab+3b^2\\ &=3(a-b)^2\\ &>0 \end{aligned}$$

ゆえに，$d<c^2\leqq 4d$ が成り立つ。

$d=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}>0$ であるため，$1<\dfrac{c^2}{d}\leqq 4$ が成り立つ。

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ であるため

cd が素数の整数乗となるときを考える。

これより，p を素数，k を正の整数，ℓ を非負整数として，
$$c=p^k,\ d=p^\ell$$
のときを考えればよい。

(1) より，$1<\dfrac{p^{2k}}{p^\ell}\leqq 4$，すなわち $1<p^{2k-\ell}\leqq 4$

p は素数，$2k-\ell$ は整数であるため
$$(p,\ 2k-\ell)=(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

[1] $(p,\ 2k-\ell)=(2,\ 1)$ のとき

$c=2^k$ より，$a+b=2^k$

また，$d=2^\ell$ より，$a^2-ab+b^2=2^\ell$

これより，$(a+b)^2-3ab=2^\ell$，すなわち
$$\begin{aligned} ab&=\frac{2^{2k}-2^\ell}{3}\\ &=\frac{2^\ell(2^{2k-\ell}-1)}{3}\\ &=\frac{2^\ell}{3}\quad(\because\ 2k-\ell=1) \end{aligned}$$

解と係数の関係から，a，b は
$$X^2-2^kX+\frac{2^\ell}{3}=0$$
の解であり，$a^2-2^ka=-\dfrac{2^\ell}{3}$ を満たすが，

左辺は整数，右辺は整数でないことになり不合理。

[2]　$(p,\ 2k-\ell)=(2,\ 2)$ のとき

$c=2^k$ より，$a+b=2^k$

また，$d=2^\ell$ より，$a^2-ab+b^2=2^\ell$

これより，$(a+b)^2-3ab=2^\ell$，すなわち

$$\begin{aligned} ab &= \frac{2^{2k}-2^\ell}{3} \\ &= \frac{2^\ell(2^{2k-\ell}-1)}{3} \\ &= 2^\ell \quad (\because\ 2k-\ell=2) \end{aligned}$$

解と係数の関係から，a，b は

$$\begin{aligned} & X^2-2^kX+2^\ell=0 \\ \Leftrightarrow\quad & X^2-2^kX+2^{2k-2}=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (X-2^{k-1})^2=0 \end{aligned}$$

の整数解であり，$(a,\ b)=(2^{k-1},\ 2^{k-1})$

[3]　$(p,\ 2k-\ell)=(3,\ 1)$ のとき

$c=3^k$ より，$a+b=3^k$

また，$d=3^\ell$ より，$a^2-ab+b^2=3^\ell$

これより，$(a+b)^2-3ab=3^\ell$，すなわち

$$\begin{aligned} ab &= \frac{3^{2k}-3^\ell}{3} \\ &= \frac{3^\ell(3^{2k-\ell}-1)}{3} \\ &= 2\cdot 3^{\ell-1} \quad (\because\ 2k-\ell=1) \end{aligned}$$

解と係数の関係から，a，b は

$$\begin{aligned} & X^2-3^kX+2\cdot 3^{\ell-1}=0 \\ \Leftrightarrow\quad & X^2-3^kX+2\cdot 3^{2k-2}=0 \\ \Leftrightarrow\quad & (X-3^{k-1})(X-2\cdot 3^{k-1})=0 \end{aligned}$$

の整数解であり，$(a,\ b)=(3^{k-1},\ 2\cdot 3^{k-1})$，$(2\cdot 3^{k-1},\ 3^{k-1})$

以上 [1]，[2]，[3] から，求める整数 a，b は，k を任意の正の整数として

$(a,\ b)=(2^{k-1},\ 2^{k-1})$，$(3^{k-1},\ 2\cdot 3^{k-1})$，$(2\cdot 3^{k-1},\ 3^{k-1})$ …㊀

【総括】

問題をパッと見たときに $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ という因数分解をして考えることは秒で分かります。

問題のファーストインプレッションで，最終的に

範囲を絞って個別検証に持ち込む

という整数問題の常套手段で仕留めるということも予見はできます。

「素数の整数乗」ということを，「素因数を 1 種類しかもたない」と読み取り，$c=p^k$，$d=p^\ell$ と立式できたかどうかが山場なのですが，p，k，ℓ という 3 文字を新たに設定する勇気がもてたかどうかという点で意外と受験生の出来はよくないと思います。