四面体 ABCD の辺 AB，AC，BD，CD 上にそれぞれ点 P，Q，R，S をとる。ただし，P，Q，R，S のどの点も四面体 ABCD の頂点とは異なるものとする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$$

が成り立つことを示せ。

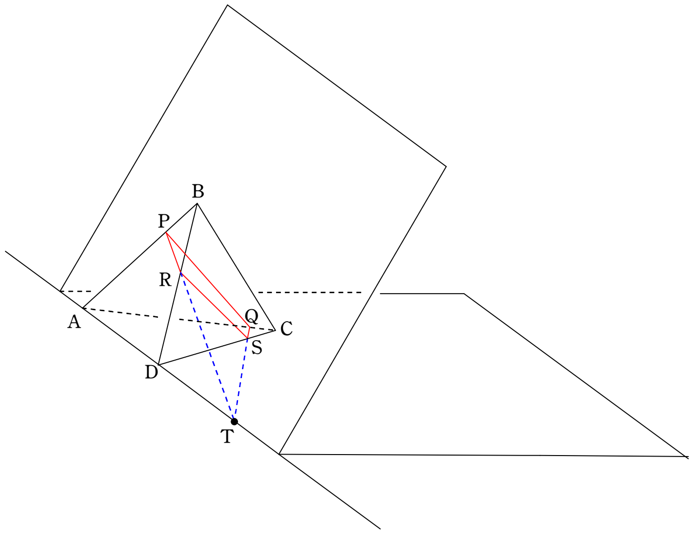
＜ '19 香川大 ＞

【戦略】

例題を参考にしてください。

【解答】

[1]　直線 PR，QS が平行でないとき



条件から P，Q，R，S は同一平面上の点で，直線 PR，QS は平行でないので，空間において直線 PR，QS は交点 T をもつ。

ねじれの位置にならない

直線 PR は平面 ABD 上の直線
直線 QS は平面 ACD 上の直線

ゆえに，直線 PR，QS の交点 T は平面 ABD 上 かつ 平面 ACD 上

すなわち，T は平面 ABD と平面 ACD の交線上にある。

平面 ABD において，△ABD と直線 PR に対してメネラウスの定理より

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TA}}=1 \quad \cdots(*)$$

平面 ACD において，△ACD と直線 QS に対してメネラウスの定理より

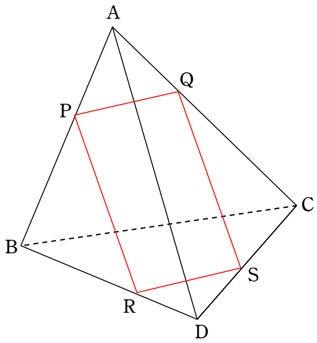
$$\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}\cdot\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TA}}=1 \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ から，$\dfrac{\mathrm{DT}}{\mathrm{TA}}$ を消去すると

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$$

が成り立つ。

[2]　直線 PR，QS が平行のとき



$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$
$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$
$\mathrm{BR}:\mathrm{RD}=r:1-r$
$\mathrm{CS}:\mathrm{SD}=s:1-s$

とする。

このとき

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-r)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AS}}=(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PR}}&=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(1-r)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}-p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(1-r-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{QS}}&=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}-q\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=(1-s-q)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{QS}}$ であるとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\,\overrightarrow{\mathrm{QS}}\quad\cdots③\ (k\text{ は }k\fallingdotseq 0\text{ を満たす実数})$$

と表せ，①，② を ③ に代入すると

$$(1-r-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\left\{(1-s-q)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\}$$

これを整理すると

$$(1-r-p)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}-k\,(1-s-q)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(r-ks)\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるため

$$\begin{cases}1-r-p=0\quad\cdots\ \mathrm{I}\\ k\,(1-s-q)=0\quad\cdots\ \mathrm{II}\\ r-ks=0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}&=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{r}{1-r}\\&=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p}\quad(\because\ \mathrm{I})\\&=1\end{aligned}$$

$k\fallingdotseq 0$ であるため，II より $1-s-q=0$，すなわち

$$1-s=q$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}&=\frac{q}{1-q}\cdot\frac{s}{1-s}\\&=\frac{q}{1-q}\cdot\frac{1-q}{q}\\&=1\end{aligned}$$

ゆえに，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$

[1]，[2] から，$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$ が成り立つ。

【総括】

幾何に頼らず，ベクトルで押し切るとなると

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$
$\mathrm{AQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$
$\mathrm{BR}:\mathrm{RD}=r:1-r$
$\mathrm{CS}:\mathrm{SD}=s:1-s$

として，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-r)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}-p\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1-p-r)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

P，Q，R，S が同一平面上にあるため，

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

を満たすような実数 α，β が存在し，

$$-p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-s)\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\alpha\left(-p\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)+\beta\left\{(1-p-r)\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+r\,\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立ですから

$$\begin{cases}-p=-\alpha p+\beta\,(1-p-r)\quad\cdots(\text{ア})\\ 1-s=\alpha q\quad\cdots(\text{イ})\\ s=\beta r\quad\cdots(\text{ウ})\end{cases}$$

(イ)，(ウ) より，$\alpha=\dfrac{1-s}{q}$，$\beta=\dfrac{s}{r}$ なので，(ア) に代入すると

$$-p=\frac{s-1}{q}p+\frac{s}{r}\,(1-p-r)$$

分母を払って整理すると，$pr\,(1-q-s)=qs\,(1-p-r)$

ここで，$\begin{cases}(1-q)\,(1-s)=1-q-s+qs\\ (1-p)\,(1-r)=1-p-r+pr\end{cases}$ であることに注意すると

$$pr\left\{(1-q)\,(1-s)-qs\right\}=qs\left\{(1-p)\,(1-r)-pr\right\}$$

であり，$pr\,(1-q)\,(1-s)=qs\,(1-p)\,(1-r)$

すなわち，$\dfrac{p}{1-p}\cdot\dfrac{r}{1-r}=\dfrac{q}{1-q}\cdot\dfrac{s}{1-s}$ が成り立つことになり

$\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RD}}=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CS}}{\mathrm{SD}}$ ということが言えます。