四面体 ABCD がある。線分 AB，BC，CD，DA 上にそれぞれ点 P，Q，R，S がある。点 P，Q，R，S は同一平面上にあり，四面体のどの頂点とも異なるとする。

(1) PQ と RS が平行であるとき，等式

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1$$

が成り立つことを示せ。

(2) PQ と RS が平行でないとき，等式

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}=1$$

が成り立つことを示せ。

< '15 埼玉大 >

【戦略】

(1) **愚直に**

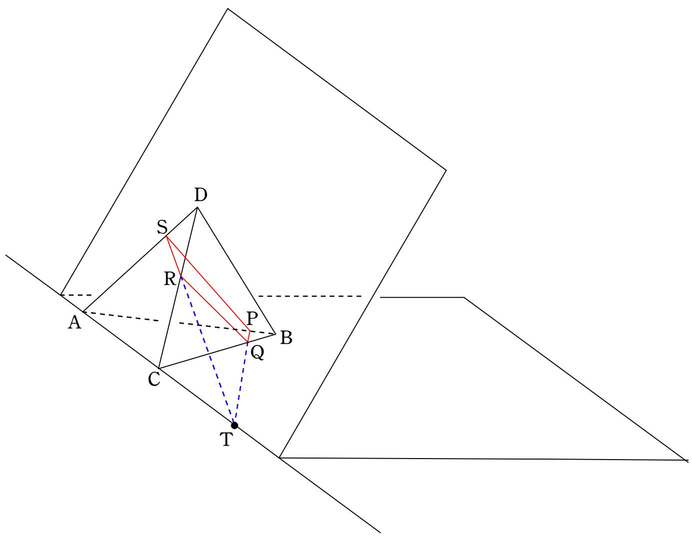
$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$， $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=r:1-r$， $\mathrm{DS}:\mathrm{SA}=s:1-s$

などと比率を設定し，ベクトルで処理していきます。

セオリー通り，「1 つの始点，3 つの基底」という言葉に従い A を始点とし，登場人物を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で表し，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ という条件から得られる関係式から迫っていけばよいでしょう。

(2) **平行でないとなると実はありがたく**

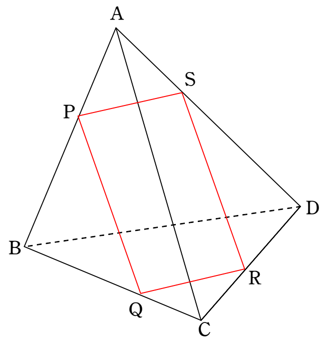


という構図となるため，

$$\begin{cases}\triangle\mathrm{ABC}\ \text{と直線 PQ}\\ \triangle\mathrm{ACD}\ \text{と直線 RS}\end{cases}$$

に対して，メネラウスの定理を用いると即解決できる形が現れます。

【解答】



(1) $\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$

$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$

$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=r:1-r$

$\mathrm{DS}:\mathrm{SA}=s:1-s$

とする。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=(1-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}-p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\&=(1-q-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots①\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{RS}}&=\overrightarrow{\mathrm{AS}}-\overrightarrow{\mathrm{AR}}\\&=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\left\{(1-r)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+r\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right\}\\&=-(1-r)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-s-r)\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots②\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}/\!/\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ であるとき，

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\ \cdots③$ (k は $k\fallingdotseq 0$ を満たす実数)

と表せ，①，② を ③ に代入すると

$$-(1-r)\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-s-r)\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\left\{(1-q-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+q\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\}$$

これを整理すると

$$k(1-p-q)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(kq+1-r)\overrightarrow{\mathrm{AC}}-(1-s-r)\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$$

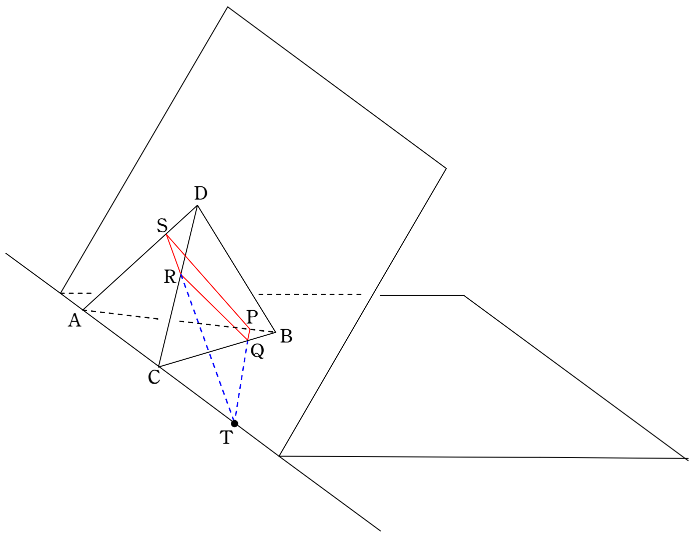
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ は 1 次独立であるため

$$\begin{cases}1-p-q=0\ \cdots\ \mathrm{I}\\ kq+1-r=0\\ 1-s-r=0\ \cdots\ \mathrm{II}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QC}}\cdot\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DS}}{\mathrm{SA}}&=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{q}{1-q}\cdot\frac{r}{1-r}\cdot\frac{s}{1-s}\\&=\frac{p}{1-p}\cdot\frac{1-p}{p}\cdot\frac{r}{1-r}\cdot\frac{1-r}{r}\quad(\because\ \mathrm{I},\ \mathrm{II})\\&=1\end{aligned}$$

となり，示された。

(2)



条件から P，Q，R，S は同一平面上の点で，直線 PQ，RS は平行でないので，空間において直線 PQ，RS は交点 T をもつ。

ねじれの位置にならない

直線 PQ は平面 ABC 上の直線
直線 RS は平面 ACD 上の直線

ゆえに，直線 PQ，RS の交点 T は平面 ABC 上 かつ 平面 ACD 上

すなわち，T は平面 ABC と平面 ACD の交線上にある。

平面 ABC において，△ABC と直線 PQ に対してメネラウスの定理より

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CT}{TA}=1 \quad \cdots(*)$$

平面 ACD において，△ACD と直線 RS に対してメネラウスの定理より

$$\frac{AS}{SD}\cdot\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CT}{TA}=1 \quad \cdots(**)$$

$(*)$，$(**)$ から，$\dfrac{CT}{TA}$ を消去すると

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}=\frac{AS}{SD}\cdot\frac{DR}{RC}$$

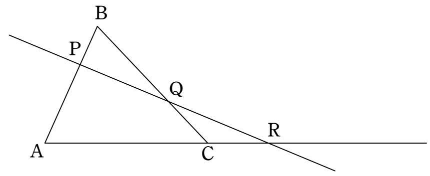
ゆえに

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

が成り立つ。

【総括】

平面版のメネラウスの定理は



というように

△ABC を直線でぶった切ったときの切り口の点（交点）P，Q，R に対し

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=1$$

というように，頂点からスタートし，

頂点 →	交点 →	頂点 →	交点 →	頂点 →	交点 →	頂点
A	P	B	Q	C	R	A

と頂点と交点を交互に踏みながら 1 周すると，比率の積が 1 となるという定理です。

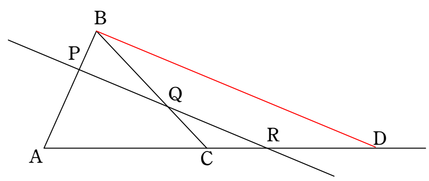
今回の (2) の主張は

四面体 ABCD を平面でぶった切ったときの切り口の点 P，Q，R，S に対し

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RD}\cdot\frac{DS}{SA}=1$$

というように，頂点と交点を交互に踏みながら 1 周すると，比率の積が 1 となるということを主張しており，まさに空間版メネラウスの定理です。

【確認：平面版メネラウスの定理の証明】



図のように，平行線を引く。

△CQR ∽ △CBD より，$\dfrac{BQ}{QC}=\dfrac{DR}{RC}$

△ARP ∽ △ADB より，$\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{AR}{RD}$

よって，

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BQ}{QC}\cdot\frac{CR}{RA}=\frac{AR}{RD}\cdot\frac{DR}{RC}\cdot\frac{CR}{RA}$$
$$=1$$