$H>0$，$R>0$ とする。座標空間内において，原点 O と点 P$(R, 0, H)$ を結ぶ線分を，z 軸の周りに回転させてできる容器がある。この容器に水を満たし，原点から水面までの高さが h のとき単位時間あたりの排水量が $\sqrt{h}$ となるように水を排出する。すなわち，時刻 t までに排出された水の総量を $V(t)$ とおくとき，$\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$ が成り立つ。このとき，すべての水を排出するのに要する時間を求めよ。

＜ '06 京都大 ＞

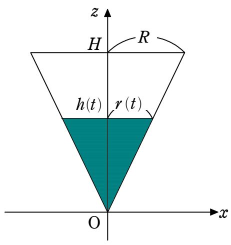
【戦略】

基本的には例題と同様，水面の高さ等の各種量は「時刻 t の関数」と捉えます。

今回の容器は円錐であるため，$V(t)$ を計算するのに積分計算は不要です。

その代わり，時刻 t における水が表す円錐の体積 (水量) を立式するために
時刻 t における水面の半径 $r(t)$
を設定する必要があります。

ただし，



という状況ですから，$\dfrac{h(t)}{r(t)}=\dfrac{H}{R}$ という相似比に注目すれば $r(t)$ は消去でき，結局 $V(t)$ が $h(t)$ で表せることになります。

$V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left\{R^2H-\dfrac{R^2}{H^2}h(t)^3\right\}$ **と得られると思います。**

ここからは，当然 $\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$ ($=\sqrt{h(t)}$) という条件を活かすことを考え両辺微分していきます。

合成関数の微分法に気を付けながら両辺微分すると

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\cdot\left\{-\frac{3R^2}{H^2}h(t)^2h'(t)\right\}$$
$$=-\frac{\pi R^2}{H^2}h(t)^2h'(t)$$

となり，$\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$ ($=\sqrt{h(t)}$) に注意して整理すると

$$h(t)^{\frac{3}{2}}h'(t)=-\frac{H^2}{\pi R^2}$$

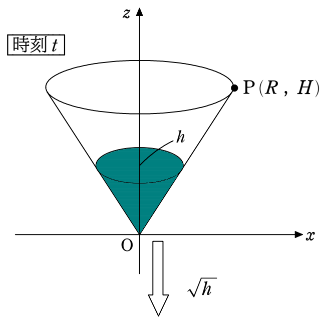
となりますから，両辺 t で積分し，$\displaystyle\int h(t)^{\frac{3}{2}}h'(t)\,dt=\int -\frac{H^2}{\pi R^2}\,dt$

$u=h(t)$ **とおくことで $\displaystyle\int u^{\frac{3}{2}}du=-\frac{H^2}{\pi R^2}t+C_1$ を得て，後は例題同様の流れになります。**

【解答】

この容器は円錐であり，その容量は

$$\frac{1}{3}\cdot\pi R^2\cdot H$$



時刻 t において

水面の高さを $h(t)$
半径を $r(t)$

とすると

$$V(t)=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi r(t)^2h(t)$$
$$=\frac{\pi}{3}\{R^2H-r(t)^2h(t)\}\ \cdots ①$$

ここで，相似比に注目すると，$\dfrac{h(t)}{r(t)}=\dfrac{H}{R}$ であり，$r(t)=\dfrac{R}{H}h(t)$ …②

② を ① に代入すれば，$V(t)=\dfrac{\pi}{3}\left\{R^2H-\dfrac{R^2}{H^2}h(t)^3\right\}$ であり，

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\cdot\left\{-\frac{3R^2}{H^2}h(t)^2h'(t)\right\}$$
$$=-\frac{\pi R^2}{H^2}h(t)^2h'(t)$$

条件 $\dfrac{dV}{dt}=\sqrt{h}$ ($=\sqrt{h(t)}$) より，$h(t)^{\frac{1}{2}}=-\dfrac{\pi R^2}{H^2}h(t)^2h'(t)$

これを整理すると，$h(t)^{\frac{3}{2}}h'(t)=-\dfrac{H^2}{\pi R^2}$

両辺 t で積分すると，$\displaystyle\int h(t)^{\frac{3}{2}}h'(t)\,dt=\int -\frac{H^2}{\pi R^2}\,dt$

$u=h(t)$ とおくと，$du=h'(t)dt$ であるため

$$\int u^{\frac{3}{2}}du=-\frac{H^2}{\pi R^2}t+C_1$$
$$\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}=-\frac{H^2}{\pi R^2}t+C$$
$$h(t)^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}\left\{-\frac{H^2}{\pi R^2}t+C\right\}\ (C\text{ は積分定数})$$

$h(0)=H$ より，$H^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}C$，すなわち $C=\dfrac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}$

ゆえに，$h(t)^{\frac{5}{2}}=\dfrac{5}{2}\left\{-\dfrac{H^2}{\pi R^2}t+\dfrac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}\right\}$

$h(t)=0$ となるような t を求めればよく，$0=\dfrac{5}{2}\left\{-\dfrac{H^2}{\pi R^2}t+\dfrac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}\right\}$

これより，$-\dfrac{H^2}{\pi R^2}t+\dfrac{2}{5}H^{\frac{5}{2}}=0$ で，$t=\dfrac{2}{5}\pi R^2H^{\frac{1}{2}}$ を得る。

以上から，全ての水を排出するのにかかる時間は $\dfrac{2}{5}\pi R^2\sqrt{H}$ …答

【総括】

水の問題は

様々な量が時刻 t の関数である

という意識をもって，

t が決まる → ○○が決まる → ××が決まる

という構造を把握し，合成関数を用いた立式を目論む気持ちがないと，何をすべきか分からないまま右往左往して彷徨うことになりますし，解答を読んでも場当たり的な解答に見えてきてしまいます。

水の問題では

・上記の眼力
・立式後の微分方程式の処理

という 2 点が山場となります。

演習量をこなすことで，このあたりの眼力を鍛えればライバルと差が付けられると思います。