曲線 $y=x^2$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ を y 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。

時刻 t において容器に残っている水の深さを h，体積を V とする。

V の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 h の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ。

＜ '03 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **水の体積 V は気持ちの上では時刻 t に依存するため，$V(t)$ という気持ちでいましょう。**

また，同様に水の高さ h も時刻 t に依存する値であるため $h(t)$ という気持ちでいたいところです。

ただ，$V(t)$ としては直接的には，高さ $h(t)$ に依存するため，見かけ上

$V=(h$ **の式**$)$

という形で表せます。（**具体的には** $V=\int_0^h \pi x^2\,dy=\int_0^h \pi y\,dy=\frac{1}{2}\pi h^2$ ）

つまり，t が決まる → h が決まる → V が決まる

ということで，V はある種 2 段階を踏んで決まる「合成関数」です。

したがって，合成関数の微分法である

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}$$

によって仕留められます。

(2) **$h(t)=0$ となる時刻 t が求める T ということになります。**

$h(t)$ を把握する最大の武器が (1) で得ることになる

$$\frac{dh}{dt}=-\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

という式です。

分かりやすく先ほどの $h(t)$ という時刻 t の関数という意味合いで見てみると

$$h'(t)=-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{h(t)}}$$

という関係式に他ならず，これを満たす「$h(t)$ な～んだ？」という

微分方程式

です。

この微分方程式の倒し方としては，$h(t)^{\frac{1}{2}}h'(t)=-\dfrac{1}{\pi}$ と変形して

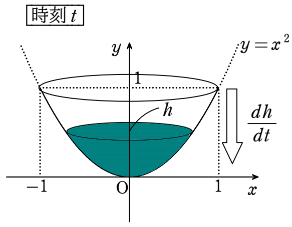
両辺 t で積分することで，$\int h(t)^{\frac{1}{2}}h'(t)\,dt=-\dfrac{1}{\pi}\int dt$ とし，$u=h(t)$ と

おくことで，$\int u^{\frac{1}{2}}\,du=-\dfrac{1}{\pi}t$，すなわち

$$\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{\pi}t+C \ (C\ \text{は積分定数})$$

として捌いていく「変数分離」という方針が有名です。

【解答】



(1) $V=\int_0^h \pi x^2\,dy$

$=\pi\int_0^h y\,dy$ （$\because y=x^2$）

$=\pi\left[\dfrac{1}{2}y^2\right]_0^h$

$=\dfrac{1}{2}\pi h^2$

したがって，$\dfrac{dV}{dh}=\pi h$ …①

一方，$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ であり，条件 $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$，及び①から

$$-\sqrt{h}=\pi h\cdot\frac{dh}{dt}$$

これより，$\dfrac{dh}{dt}=-\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$ …答

(2) h は時刻 t に依存するため，$h=h(t)$ と表す。

(1) より，$h(t)^{\frac{1}{2}}h'(t)=-\dfrac{1}{\pi}$ であるため，両辺 t で積分すると

$$\int h(t)^{\frac{1}{2}}\cdot h'(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int dt$$

$h(t)=u$ とおくと，$h'(t)\,dt=du$ なので，$\int u^{\frac{1}{2}}\,du=-\dfrac{1}{\pi}t+C_1$

すなわち，$\dfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}t+C$ （C_1，C は定数）

と表せ，$h(t)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{\pi}t+C\right)$ を得る。

$t=0$ のとき，$h(0)=1$ であるため，$C=\dfrac{2}{3}$

これより，$h(t)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{\pi}t+\dfrac{2}{3}\right)$

$h(t)=0$ となるときの t は $0=\dfrac{3}{2}\left(-\dfrac{1}{\pi}t+\dfrac{2}{3}\right)$ を解き

$$t=\frac{2}{3}\pi$$

これが求める T であり，$T=\dfrac{2}{3}\pi$ …答

【総括】

$\frac{dV}{dt}$ や $\frac{dh}{dt}$ という記号は本当によくできた記号で，様々な意味を含んでいます。

時刻 t から，$\varDelta t$ 経過したときの V の変化量を $\varDelta V$ としたとき

$\varDelta V = V(t+\varDelta t) - V(t)$ ですから

$$\frac{\varDelta V}{\varDelta t} = \frac{V(t+\varDelta t)-V(t)}{\varDelta t}$$

$\varDelta t$ が十分に小さいとき，

$$\frac{dV}{dt} = \lim_{\varDelta t \to 0} \frac{\varDelta V}{\varDelta t} \quad (= \text{時刻 } t \text{ における瞬間の体積変化の速度})$$

を意味します。

同様に，$\frac{dh}{dt}$ は時刻 t における瞬間の高さ変化の速度を意味します。

物理において，微分によって

その時々（時刻 t）における○○の変化速度

が得られるということは心に留めておきたいことです。

なお，【解答】では分かりやすさを重視しましたが

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

から，$\sqrt{h} \cdot \frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi}$ とし，

$$\int \sqrt{h} \cdot \frac{dh}{dt}\, dt = \int -\frac{1}{\pi}\, dt$$

とすると，$\int \sqrt{h}\, dh = -\frac{1}{\pi}\int dt$ というように，あたかも約分のように見えて【解答】の結果と合流します。

実戦の現場ではこのように処理することが多いと思います。