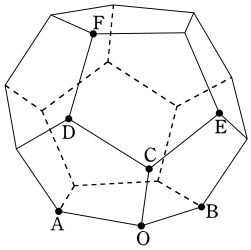
正十二面体についての位置ベクトル



１辺の長さが１の正十二面体を考える。点 O，A，B，C，D，E，F を図に示す正十二面体の頂点とし，

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=\vec{c}$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

なお，正十二面体では，すべての面は合同な正五角形であり，各頂点は３つの正五角形に共有されている。

(1) １辺の長さが１の正五角形の対角線の長さを求めて，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{OF}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) O から平面 ABD に垂線 OH を下ろす。$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。さらにその長さを求めよ。

＜ '11 福井大 ＞

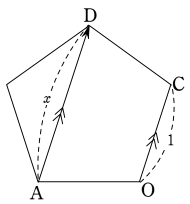
【戦略】

(1) **黄金三角形の黄金分割に注目します。(この言い回しが通じなかった場合，テーマ別演習「18°がらみの三角比」を参照してください。)**

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos108°$，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ **ですから，**$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\cos72°$ **なので結局は** $\cos72°$ **が分かれば解決です。**

求める対角線は x **と文字で置いておくと，(2) 以降も使いまわせます。**

(2) $\overrightarrow{CD}$ **については，O，A，C，D を含む正五角形を取り出します。**



という構図であり，$\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{OC}$ **であることが急所となります。**

$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}$ **と繋いでいけばいいですが，**$\overrightarrow{CF}$ **を出すためには** $\overrightarrow{CE}$**，もっと言えば** $\overrightarrow{OE}$ **が必要となります。**

そこで，O，B，C，E を含む正五角形に注目し，$\overrightarrow{OE}$ **を求めます。**

(3) **平面 ABD 上の点 H は**

$$\overrightarrow{OH}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+(1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OD}$$

と表せます。(共面条件)

一方，$\overrightarrow{OH}$ **は平面 ABD と垂直ですから，平面 ABD 上の２本のベクトル** $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$ **について，**$\begin{cases}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$ **と言えます。**

α，β **という未知数２つに対して，条件式が２本ありますから方針面では解決します。**

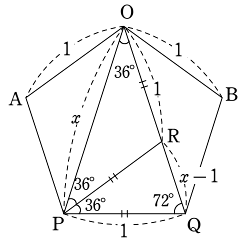
$\overrightarrow{OH}$ **が** $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ **で表せればこちらのもので，これらの大きさと内積は手中にあるため，長さを得るのも容易です。**

【解答】

(1) 求める対角線の長さを x とおく。

(図 1) のように P，Q をとると

$\triangle OPQ \sim \triangle PQR$ より



(図 1)

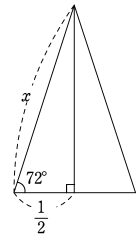
$$1 : x = x-1 : 1$$

これより，$x(x-1)=1$

すなわち $x^2-x-1=0$

$x>0$ より，$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ゆえに，対角線の長さは $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ …答



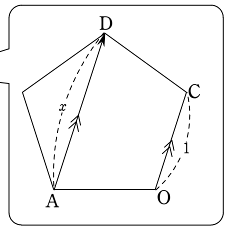
(図 2)

また，(図 2) より，$\cos72°=\dfrac{\frac{1}{2}}{x}=\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{1+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

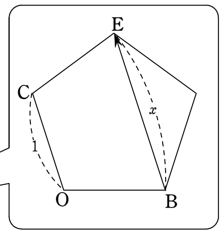
$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos108°\\&=-\cos72°\\&=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(2)

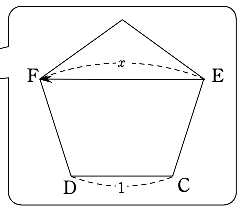
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD}&=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\\&=\overrightarrow{OA}+x\,\overrightarrow{OC}\\&=\vec{a}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD}&=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\\&=\left(\vec{a}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\right)-\vec{c}\\&=\vec{a}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$



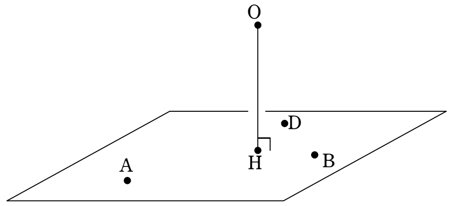
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE}&=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BE}\\&=\overrightarrow{OB}+x\,\overrightarrow{OC}\\&=\vec{b}+x\vec{c}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF}&=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}\\&=\overrightarrow{CE}+x\,\overrightarrow{CD}\\&=(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC})+x\left(\vec{a}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\right)\\&=\left\{(\vec{b}+x\vec{c})-\vec{c}\right\}+x\left(\vec{a}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\right)\\&=x\vec{a}+\vec{b}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}x-1\right)\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OF}&=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CF}\\&=\vec{c}+\left\{x\vec{a}+\vec{b}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}x-1\right)\vec{c}\right\}\\&=x\,\vec{a}+\vec{b}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\,\vec{c}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}\vec{c}\\&=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\vec{a}+\vec{b}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\vec{c}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3)



Hは平面ABD上の点なので，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-\alpha-\beta)\,\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

と表せる。

(2) の途中経過から，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+x\,\vec{c}$ であったから，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\alpha\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+(1-\alpha-\beta)\,(\vec{a}+x\,\vec{c})\\&=(1-\beta)\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+x\,(1-\alpha-\beta)\,\vec{c}\ \cdots(*)\end{aligned}$$

以下，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos108^\circ=\frac{1-\sqrt{5}}{4}\ (\,=p\ \text{とおく})$$

であることに注意する。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$

$$\left\{(1-\beta)\,\vec{a}+\beta\,\vec{b}+x\,(1-\alpha-\beta)\,\vec{c}\right\}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(1-\beta)\,p-(1-\beta)+\beta-\beta p+x\,(1-\alpha-\beta)p-x\,(1-\alpha-\beta)p\\&=-2\beta p+2\beta+p-1\\&=2\beta\,(1-p)-(1-p)\\&=(1-p)\,(2\beta-1)\end{aligned}$$

よって，$(1-p)\,(2\beta-1)=0$ で，$p\neq1$ だから，$\beta=\dfrac{1}{2}$

$(*)$ に代入し，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}+x\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)\vec{c}\ \cdots(**)$

一方，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=0$

(2) の途中経過より，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=x\,\vec{c}$ であったから

$$\left\{\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+x\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\vec{c}\right\}\cdot x\,\vec{c}=0$$

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{x}{2}p+\frac{x}{2}p+x^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\\&=px+x^2\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\end{aligned}$$

よって，$px+x^2\left(\dfrac{1}{2}-\alpha\right)=0$ で，$x>0$ であるから

$$p+x\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)=0$$

これより，

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{p}{x}+\frac{1}{2}\\&=\frac{\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}+\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\end{aligned}$$

$(**)$ に代入し

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\vec{c}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{4}\vec{c}\\&=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\vec{c}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\right)$ より

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=\frac{1}{4}\left|\,\vec{a}+\vec{b}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{c}\,\right|^2\\&=\frac{1}{4}\left\{1+1+\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}+2p+(\sqrt{5}-1)p+(\sqrt{5}-1)p\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{5}\,p\right\}\\&=\frac{1}{4}\left\{\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{5}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right\}\\&=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

したがって，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{2}\ \cdots$ 答

【総括】

正十二面体は，正五角形が絡むため，長さや内積において黄金比が絡む無理数が登場します。

比率としては美しいとされる黄金比ですが，数値計算上は汚い計算となるため，できる限り文字のまま計算を進めるなどの工夫を考えたいところです。

黄金比，黄金三角形，黄金分割については

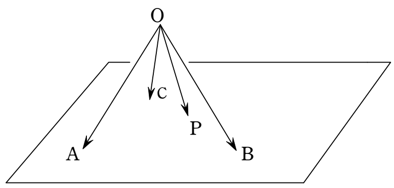
テーマ別演習「18°がらみの三角比」

を参照してください。

また，一般に平面ABC上の任意の点Pに対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(\text{ただし，}\alpha+\beta+\gamma=1)$$

という共面条件は常識にしておきましょう。



Pが平面ABC上なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ (s，t は実数) と表せ

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+t\,(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(1-s-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\end{aligned}$$

あらためて，$\alpha=1-s-t$，$\beta=s$，$\gamma=t$ とおきなおすことで

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\gamma\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(\text{ただし，}\alpha+\beta+\gamma=1)$$

と表せます。