次の問に答えよ。

(1) 平面上の 2 点 $F_1(-1,\ 0)$, $F_2(1,\ 0)$ からの距離の和が $2a$ $(a>1)$ である楕円 C の方程式を求めよ。

(2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ。

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき，

$$\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{QF_1}{QF_2}$$

であることを示せ。

< '09 鹿児島大 >

【戦略 1】

(1) **楕円であることを前提として用いるのであれば，楕円上の点 P に対し**

$$PF_1+PF_2=(\text{長軸の長さ})=2a$$

ということになり，焦点が x 軸上であることも加味すると横長の楕円なので

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

と設定できます。

この方程式で表される楕円の焦点は $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ なので $\sqrt{a^2-b^2}=1$，すなわち $b^2=a^2-1$ を得て解決です。

(2) **(1) で得る楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ と $y=-x+2$ を連立して出てくる 2 次方程式の判別式が 0 となる瞬間をとらえればよいでしょう。**

(3) **(2) を正しく計算できていれば $P\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ と得られているはずです。**

P における接線 $y=-x+2$ の傾きは -1 ですから，それに直交する法線の傾きは 1 で，$\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)$ を通ることから法線が

$y=\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}$，**すなわち** $y=x-\frac{1}{2}$ **と得られ，x 軸との交点 Q は $Q\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ と得られます。**

P，Q，F_1，F_2 の座標は具体的に分かるため，PF_1，PF_2，QF_1，QF_2 も具体的に計算できるため，困ることはないはずです。

【解 1】

(1) 楕円 C 上の任意の点 P に対し，$PF_1+PF_2=2a$ を満たすとき PF_1+PF_2 はこの楕円 C の長軸の長さに一致する。

今，F_1，F_2 は楕円 C の焦点であり，これらが x 軸上にあることから，この楕円 C は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$$

と表すことができ，焦点が $(\pm\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ であることから $\sqrt{a^2-b^2}=1$，すなわち $b^2=a^2-1$ を得る。

ゆえに，求める楕円 C の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1\ \cdots 答$$

(2) $x+y=2$ $(\Leftrightarrow y=-x+2)$ と $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ を連立して y を消去すると

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(-x+2)^2}{a^2-1}=1$$

これを整理すると

$$(2a^2-1)x^2-4a^2x-(a^4-5a^2)=0\ \cdots(*)$$

$(*)$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=(-2a^2)^2-(2a^2-1)\cdot\{-(a^4-5a^2)\}\\&=4a^4+a^2(2a^2-1)(a^2-5)\\&=2a^6-7a^4+5a^2\\&=a^2(2a^4-7a^2+5)\\&=a^2(2a^2-5)(a^2-1)\\&=a^2(a+1)(a-1)(\sqrt{2}a+\sqrt{5})(\sqrt{2}a-\sqrt{5})\end{aligned}$$

$x+y=2$ と $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ が接するとき，$\frac{D}{4}=0$ なので

$$a^2(a+1)(a-1)(\sqrt{2}a+\sqrt{5})(\sqrt{2}a-\sqrt{5})=0$$

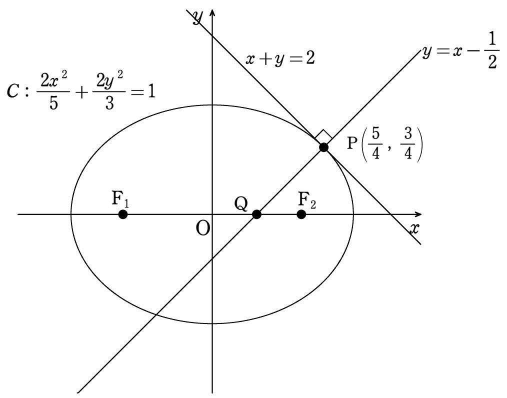
条件 $a>1$ より，$a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}\ \cdots 答$

このとき，$(*)$ の重解は $x=\frac{2a^2}{2a^2-1}=\frac{2\cdot\frac{5}{2}}{2\cdot\frac{5}{2}-1}=\frac{5}{4}$

そのときの y は $y=-x+2=-\frac{5}{4}+2=\frac{3}{4}$

よって，P の座標は $P\left(\frac{5}{4},\ \frac{3}{4}\right)\cdots 答$

(3)



点 $P\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$ における接線の傾きは -1 であるため，それに直交する法線の傾きは1であることから，この法線の方程式は

$$y=\left(x-\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}，すなわち\ y=x-\frac{1}{2}$$

よって，$y=x-\frac{1}{2}$ と x 軸との交点 Q の座標は $\left(\frac{1}{2},0\right)$

$$\frac{QF_1}{QF_2}=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1-\frac{1}{2}}=3\ \cdots ①$$

一方，$\begin{cases} PF_1=\sqrt{\left(\frac{5}{4}+1\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{4} \\ PF_2=\sqrt{\left(\frac{5}{4}-1\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{4} \end{cases}$ なので

$$\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{4}}=3\ \cdots ②$$

①，② より，$\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{QF_1}{QF_2}$ が成り立つ。

【戦略 2】(2) について

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 (s,t) における接線が

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$

であるという接線公式を用いて処理することもできます。

今回は $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ 上の点 P を $P(a\cos\theta,\sqrt{a^2-1}\sin\theta)$ とパラメータ表示して，上記の接線公式を用いて接線の式を立て，それが直線 $y=-x+2$ と一致するという方向性で捌きます。

【解 2】(2) について

楕円 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1$ 上の点 P は，$P(a\cos\theta,\sqrt{a^2-1}\sin\theta)$ と表せ

この点 P における接線の方程式は $\frac{(a\cos\theta)x}{a^2}+\frac{(\sqrt{a^2-1}\sin\theta)y}{a^2-1}=1$

すなわち

$$\frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2-1}}y=1$$

これが直線 $x+y=2$，すなわち $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$ と一致するときを考えるので

$$\begin{cases} \frac{\cos\theta}{a}=\frac{1}{2} \\ \frac{\sin\theta}{\sqrt{a^2-1}}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

これより，

$$\begin{cases} \cos\theta=\frac{a}{2} \\ \sin\theta=\frac{\sqrt{a^2-1}}{2} \end{cases}\ \cdots(☆)$$

を得て，$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ であるから $\frac{a^2}{4}+\frac{a^2-1}{4}=1$，すなわち

$$a^2=\frac{5}{2}$$

を得る。

条件 $a>1$ より，$a=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ …答

このとき，(☆) より，

$$\begin{cases} a\cos\theta=a\cdot\frac{a}{2}=\frac{a^2}{2}=\frac{5}{4} \\ \sqrt{a^2-1}\sin\theta=\sqrt{a^2-1}\cdot\frac{\sqrt{a^2-1}}{2}=\frac{a^2-1}{2}=\frac{\frac{5}{2}-1}{2}=\frac{3}{4} \end{cases}$$

ゆえに，このときの P の座標は $\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$ …答

【総括】

楕円であることを前提とすれば，楕円に関する様々な諸性質を駆使しながら立式できます。

例題でも述べたように，本問は具体的な点に対する比率計算であったため正直ただの計算問題として終わってしまいました。

以下，楕円に関する諸性質の確認を載せておきますので，曖昧に記憶のみに頼っていた方はご確認ください。

【楕円の方程式の導出】

楕円の定義は

$c>0$ に対し，$\mathrm{F}_1(c\,,\,0)$，$\mathrm{F}_2(-c\,,\,0)$ を考え，$\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=$(一定)
となるような点 $\mathrm{P}\,(X\,,\,Y)$ の軌跡が表す曲線です。

この一定値を a などとおいてもよいのですが，$2a$ としておくと後の計算が楽になります。

つまり，$\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$ となる点 $\mathrm{P}(X\,,\,Y)$ の軌跡を考えます。

$$\sqrt{(X-c)^2+Y^2}+\sqrt{(X+c)^2+Y^2}=2a$$

$$\sqrt{(X-c)^2+Y^2}=2a-\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$$

$$(X-c)^2+Y^2=4a^2-4a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}+(X+c)^2+Y^2$$

これを整理すると，$a^2+cX=a\sqrt{(X+c)^2+Y^2}$ で

$$(a^2+cX)^2=a^2\{(X+c)^2+Y^2\}$$

これを整理すると

$$(a^2-c^2)X^2+a^2Y^2=a^2(a^2-c^2)$$

これより，

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2-c^2}=1$$

を得て，これが $\mathrm{PF}_1+\mathrm{PF}_2=2a$ を満たす点 $\mathrm{P}(X\,,\,Y)$ の軌跡を表す方程式で，この方程式が表す曲線が楕円と呼ばれ，$(\pm c\,,\,0)$ をこの楕円の焦点と呼びます。

結局この形は $\dfrac{X^2}{\text{定数}}+\dfrac{Y^2}{\text{定数}}=1$ という形であるため，見栄えをシンプルにするために，$a^2-c^2=b^2$ とおくと，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

という形を得るわけです。

ただシンプルにした代償として，この形だと，
焦点の情報を与える c が見かけ上消えてしまう
ということになってしまいます。

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ という形から，焦点の情報を復元しようと思うと，

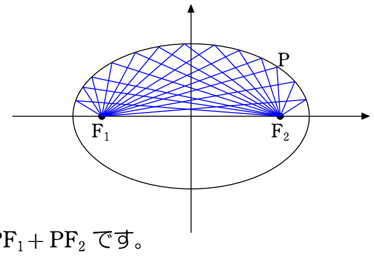
$$a^2-c^2=b^2$$

と置いていたことから，$c^2=a^2-b^2$ と計算します。

これは上述の楕円の方程式の導出過程で現れる置き換えですが，この導出過程を経ないと得られないかというと，そうでもありません。

【紐の長さ＝長軸の長さ という性質】

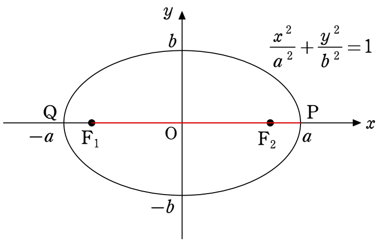
楕円のイメージは F_1，F_2 をピンで固定し，紐をピンと張って動かすイメージをもってください。



この紐の長さが PF_1+PF_2 です。

以下，簡単に PF_1+PF_2 を「紐の長さ」と呼びます。

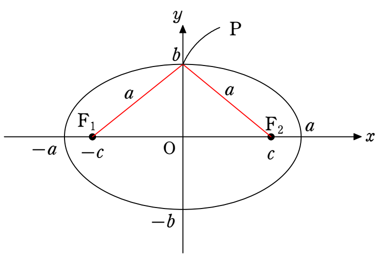
P が $(a\,,\,0)$ の場所に来ても，紐の長さは $2a$ です。



$$\begin{aligned}PF_1+PF_2&=(F_1F_2+PF_2)+PF_2\\&=(F_1F_2+PF_2)+QF_1\ \text{（対称性より）}\\&=\text{（長軸の長さ）}\end{aligned}$$

ということが言えます。

【$c^2=a^2-b^2$ の簡単な導出】



P が $(0\,,\,b)$ の場所に来ても，紐の長さは $2a$ です。

対称性から，$PF_1=PF_2=a$ ということになります。

そうなると，三平方の定理より，$b^2+c^2=a^2$ が言えるため，

$$c^2=a^2-b^2$$

という関係式が導出できます。

このように，特別なシチュエーションを考えることにより，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

という式に含まれる

「a，b（切片の情報）」から，「焦点 c の情報（$c^2=a^2-b^2$）」

を得ることができるわけです。

【楕円の接線公式】

楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点 $(s\,,\,t)$ における接線が

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$

であることの証明もしておきます。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{a^2}\cdot 2x+\frac{1}{b^2}\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

これを整理すると，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}$ を得ます。

この楕円上の点 $(s\,,\,t)$ における接線の傾きは

$$-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{s}{t}$$

よって，接線の方程式は

$$y=-\frac{b^2s}{a^2t}(x-s)+t$$

これを整理すると，$b^2s\,x+a^2t\,y=b^2s^2+a^2t^2$

両辺 $b^2s^2+a^2t^2$ で割ると

$$\frac{b^2s}{b^2s^2+a^2t^2}x+\frac{a^2t}{b^2s^2+a^2t^2}y=1\ \cdots(☆)$$

今，$(s\,,\,t)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の点なので，$\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{b^2}=1$ すなわち，

$$b^2s^2+a^2t^2=a^2b^2$$

を満たします。

よって，(☆) は，$\dfrac{b^2s}{a^2b^2}x+\dfrac{a^2t}{a^2b^2}y=1$，すなわち，

$$\frac{sx}{a^2}+\frac{ty}{b^2}=1$$

となり，これが題意の接線を表す方程式です。