平面上の点 P と，2 点 $F_1(-1,\ 0)$，$F_2(1,\ 0)$ について，等式

$$PF_1+PF_2=2a\ \ (a>1)$$

を満たす点 P の軌跡が表す曲線を C とする。次の問に答えよ。

(1) 曲線 C の方程式を a を用いて表せ。

(2) 曲線 C の $x>0$，$y>0$ の部分における点 P における曲線 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき，P の位置によらず

$$\frac{PF_1}{PF_2}=\frac{QF_1}{QF_2}$$

であることを示せ。

＜ '09 鹿児島大 改 ＞

【戦略】

(1) **楕円であることは明確ですが，一応ここでは，$P(X,\ Y)$ とし，与えられた**

$$PF_1+PF_2=2a\ \ (a>1)$$

を元に，X，Y が満たすべき関係式を導出・整理します。

発想的には特に凝ったことをするわけではなく，

$$\sqrt{(X+1)^2+Y^2}+\sqrt{(X-1)^2+Y^2}=2a$$

を捌いていきます。

$\sqrt{\ }$ を単独一匹狼にして，2 乗して $\sqrt{\ }$ を根気強く消していきます。

楕円の前提知識があれば，結論が $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ であることは見えますから，計算ミスには気がつきやすいと思います。

(2) **楕円の接線公式を使いたいところですが，(1) で楕円の前提知識を前提としない解答をした以上，それに合わせてここでは封印します。**

そうなると，微分によって $P(s,\ t)$ における接線の傾きを出し，それに垂直な法線の傾きを出すという方針が有力で，それにより法線の方程式が求まります。

それによって，法線の x 切片の値も求まりますから

$$PF_1,\ PF_2,\ QF_1,\ QF_2$$

がすべて立式できます。

QF_1，QF_2 **の方は簡単で，** $\begin{cases} QF_1=\left|\dfrac{s}{a^2}+1\right|=\left|\dfrac{a^2+s}{a^2}\right| \\ QF_2=\left|\dfrac{s}{a^2}-1\right|=\left|\dfrac{a^2-s}{a^2}\right| \end{cases}$ **と立式できるはずです。**

PF_1，PF_2 **は鬱陶しく** $\begin{cases} PF_1=\sqrt{(s+1)^2+t^2} \\ PF_2=\sqrt{(s-1)^2+t^2} \end{cases}$ **です。**

ここからは，$P(s,\ t)$ が $\dfrac{s^2}{a^2}+\dfrac{t^2}{a^2-1}=1$ を満たしていることを利用し，QF_1，QF_2 の式に t が入っていないことに目を付け，t^2 を消去して計算していけばよいでしょう。

【解答】

(1) $P(X,\ Y)$ とすると，

$$PF_1+PF_2=\sqrt{(X+1)^2+Y^2}+\sqrt{(X-1)^2+Y^2}$$

であることから

$$\sqrt{(X+1)^2+Y^2}+\sqrt{(X-1)^2+Y^2}=2a$$

$$\sqrt{(X-1)^2+Y^2}=2a-\sqrt{(X+1)^2+Y^2}$$

$$(X-1)^2+Y^2=4a^2-4a\sqrt{(X+1)^2+Y^2}+(X+1)^2+Y^2$$

これを整理すると

$$a^2+X=a\sqrt{(X+1)^2+Y^2}$$

これより，

$$(a^2+X)^2=a^2\{(X+1)^2+Y^2\}$$

これを展開し，整理すると

$$(a^2-1)X^2+a^2Y^2=a^2(a^2-1)$$

条件 $a>1$ より，$a^2(a^2-1)>0$ であるから，両辺 $a^2(a^2-1)$ で割って

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{a^2-1}=1$$

よって，点 P の軌跡が表す曲線の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-1}=1\ \cdots 答$$

(2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{1}{a^2}\cdot 2x+\frac{1}{a^2-1}\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2y}{a^2-1}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a^2-1}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$P(s,\ t)$ $(s>0,\ t>0)$ とすると，点 P における接線の傾きは

$$-\frac{a^2-1}{a^2}\cdot\frac{s}{t}$$

ゆえに，P における法線の傾きは $\dfrac{a^2}{a^2-1}\cdot\dfrac{t}{s}$

したがって，P における法線の方程式は

$$y=\frac{ta^2}{s(a^2-1)}(x-s)+t$$

$y=0$ としたとき，

$$0=\frac{ta^2}{s(a^2-1)}(x-s)+t$$

$$0=ta^2(x-s)+ts(a^2-1)$$

$$ta^2x=ts$$

これより，$x=\dfrac{s}{a^2}$ を得る。

ゆえに，$\begin{cases} \mathrm{QF_1}=\left|\dfrac{s}{a^2}+1\right|=\left|\dfrac{a^2+s}{a^2}\right| \\ \mathrm{QF_2}=\left|\dfrac{s}{a^2}-1\right|=\left|\dfrac{a^2-s}{a^2}\right| \end{cases}$

であり，$\dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}=\dfrac{|a^2+s|}{|a^2-s|}\cdots$①

一方，$\begin{cases} \mathrm{PF_1}=\sqrt{(s+1)^2+t^2}\ \cdots(☆) \\ \mathrm{PF_2}=\sqrt{(s-1)^2+t^2}\ \cdots(★) \end{cases}$

$\mathrm{P}(s,t)$ は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2-1}=1$ 上の点であるため

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{a^2-1}=1$$

これより，$t^2=\dfrac{(a^2-1)(a^2-s^2)}{a^2}$ を得る。

(☆) より

$$\begin{aligned}\mathrm{PF_1}&=\sqrt{(s+1)^2+\frac{(a^2-1)(a^2-s^2)}{a^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2(s+1)^2+(a^2-1)(a^2-s^2)}{a^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2(s^2+2s+1)+(a^4-a^2s^2-a^2+s^2)}{a^2}}\\&=\frac{\sqrt{a^4+2sa^2+s^2}}{|a|}\\&=\frac{\sqrt{(a^2+s)^2}}{|a|}\\&=\frac{|a^2+s|}{|a|}\end{aligned}$$

(★) より

$$\begin{aligned}\mathrm{PF_2}&=\sqrt{(s-1)^2+\frac{(a^2-1)(a^2-s^2)}{a^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2(s-1)^2+(a^2-1)(a^2-s^2)}{a^2}}\\&=\sqrt{\frac{a^2(s^2-2s+1)+(a^4-a^2s^2-a^2+s^2)}{a^2}}\\&=\frac{\sqrt{a^4-2sa^2+s^2}}{|a|}\\&=\frac{\sqrt{(a^2-s)^2}}{|a|}\\&=\frac{|a^2-s|}{|a|}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\frac{|a^2+s|}{|a^2-s|}\cdots②$$

①，② より $\dfrac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\dfrac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}$ が成立する。

【総括】

楕円の法線と焦点についての比率に関する美しい性質です。

原題は，以下のようでした。

> (1) 平面上の 2 点 $\mathrm{F_1}(-1, 0)$，$\mathrm{F_2}(1, 0)$ からの距離の和が $2a\ (a>1)$ である楕円 C の方程式を求めよ。
> (2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき，a の値と接点 P の座標を求めよ。
> (3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき，
> $$\frac{\mathrm{PF_1}}{\mathrm{PF_2}}=\frac{\mathrm{QF_1}}{\mathrm{QF_2}}$$
> であることを示せ。

改作した理由としては

(2) の点 P は特定の点であり，この特定の点 P に対して比率が等しいことを具体的な数字で確かめるだけになってしまい，面白みがあまりない。

ということです。

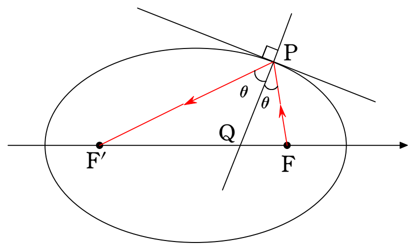
なお，この原題の解答については別途解答 PDF に載せておきます。

そちらの解答では、

２定点からの距離の和が一定となるような点の軌跡が表す曲線の方程式は
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
という形で表せ，その曲線を楕円と呼ぶ。

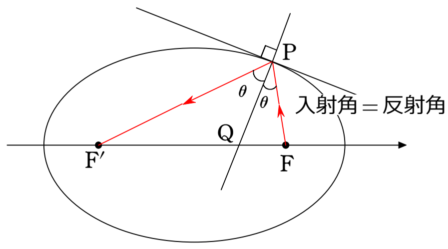
という楕円の前提知識を用いた解答としておきます。

【参考】楕円の光学的性質



本問の結果から，$\dfrac{\mathrm{PF'}}{\mathrm{PF}}=\dfrac{\mathrm{QF'}}{\mathrm{QF}}$ が成り立つため，今回の点 P における法線は $\angle \mathrm{FPF'}$ の二等分線です。（ $\angle \mathrm{FPQ}=\angle \mathrm{F'PQ}$（ $=\theta$ とおく））

そうなると



入射角と反射角が等しい，すなわち「完全反射」が起こっていることを意味します。

この現象が楕円上の任意の点 P で起きているということは

> 楕円を鏡と思ったとき，
> 一方の焦点 F から出た光はもう一方の焦点 F′ に向かって反射する

という「光学的性質」の証明となっていることを意味します。