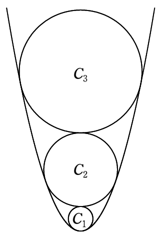



座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を $D$ とする。

$D$ 内にあり $y$ 軸上に中心をもち，原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を $C_1$ とする。

自然数 $n$ について，円 $C_n$ が定まったとき，$C_n$ の上部で $C_n$ に外接する円で，$D$ 内にあり $y$ 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を $C_{n+1}$ とする。

$C_n$ の半径を $a_n$ とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n$ とする。

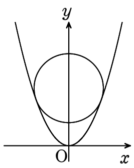
(1) $a_1$ を求めよ。

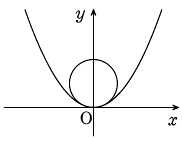
(2) $n \geqq 2$ のとき，$a_n$ を $b_{n-1}$ で表せ。

(3) $a_n$ を $n$ の式で表せ。

＜ ’04 大阪大 ＞

**【戦略 1】**

**基本的には**  **というシチュエーションなのですが**


**(1) については**  **という状況を立式していきます。**


**この状況を与える円としては，$x^2 + (y - r)^2 = r^2$ という状態です。**

**これと $y = x^2$ を連立させると，$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$ となります。**

**これを整理すると，$x^2\{x^2 - (2r - 1)\} = 0$ となりますが，状況的に $x = 0$ という重解以外の実数解をもたないので，$2r - 1 \leqq 0$ となります。**

**つまり，このシチュエーションを与える最大の半径 $r$ は $\dfrac{1}{2}$ ということになり，それが $a_1$ です。**

**(2) $C_2$，$C_3$，$\cdots$ 以降は 2 点で接する場合なので，例題同様の戦略になります。**

**中心 $(0,\ p_n)$，半径 $a_n$ に関する関係式を例題同様の戦略で導出すると**

$$a_n{}^2 = p_n - \frac{1}{4}$$

**を得ます。**

**$p_n = (C_1\text{ の直径}) + (C_2\text{ の直径}) + \cdots\cdots + (C_{n-1}\text{ の直径}) + a_n$**

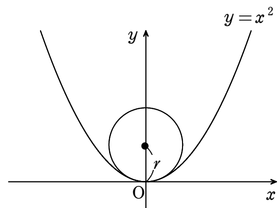
**ということを考えれば，$p_n = 2b_{n-1} + a_n$ ですから**

**先ほどの $a_n{}^2 = p_n - \dfrac{1}{4}$ を $p_n = a_n{}^2 + \dfrac{1}{4}$ と見て $a_n{}^2 + \dfrac{1}{4} = 2b_{n-1} + a_n$ とし，$a_n$ の 2 次方程式と見れば，$a_n$ を $b_n$ で表せるでしょう。**

**(3) 最終的に数列 $\{a_n\}$ の一般項が欲しいわけですから，(2) で得た $a_n$，$b_n$ が入り混じった関係式から，$b_n$ を消去することを考えればよいでしょう。**

**【解 1】**

(1) (図 1) の状態のとき




(図 1)

$$x^2 + (y - r)^2 = r^2$$

$y = x^2$ と連立すると，

$$x^2 + (x^2 - r)^2 = r^2$$

整理すると，$x^4 - (2r - 1)x^2 = 0$

すなわち $x^2\{x^2 - (2r - 1)\} = 0$

この方程式が $x = 0$ (重解) 以外の実数解をもたないので

$$2r - 1 \leqq 0$$

すなわち，$r \leqq \dfrac{1}{2}$

よって，(図 1) の状況を与える半径 $r$ の最大値は $\dfrac{1}{2}$

ゆえに，$C_1$ の半径 $a_1$ は $a_1 = \dfrac{1}{2}$ … 答

(2) $C_n$ の中心を $(0,\ p_n)$ とすると，$C_n$ の方程式は

$$x^2 + (y - p_n)^2 = a_n{}^2$$

これと $y = x^2$ を連立して $x^2$ を消去すると

$$y + (y - p_n)^2 = a_n{}^2$$

整理すると，$y^2 - (2p_n - 1)y + p_n{}^2 - a_n{}^2 = 0$

この判別式を $D$ とすると，$D = 0$ であるため

$$(2p_n - 1)^2 - 4(p_n{}^2 - a_n{}^2) = 0$$

これより，$a_n{}^2 = p_n - \dfrac{1}{4}$ $\left(\Leftrightarrow\ p_n = a_n{}^2 + \dfrac{1}{4}\right)$ を得る。

$$\begin{aligned} p_n &= (C_1\text{ の直径}) + (C_2\text{ の直径}) + \cdots\cdots + (C_{n-1}\text{ の直径}) + a_n \\ &= 2a_1 + 2a_2 + \cdots\cdots + 2a_{n-1} + a_n \\ &= 2b_{n-1} + a_n \end{aligned}$$

よって，$a_n{}^2 + \dfrac{1}{4} = 2b_{n-1} + a_n$

整理すると，$a_n{}^2 - a_n - 2b_{n-1} + \dfrac{1}{4} = 0$ …(☆)

これを $a_n$ についての 2 次方程式と見て

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\left(-2b_{n-1} + \frac{1}{4}\right)}}{2} \\ &= \frac{1 \pm 2\sqrt{2b_{n-1}}}{2} \end{aligned}$$

$n \geqq 2$ に対して，$a_n > a_1 \left(=\dfrac{1}{2}\right)$ より

$$a_n = \frac{1+2\sqrt{2b_{n-1}}}{2} \quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)\ \cdots 答$$

(3)　(☆) より $n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ のとき

$$\begin{cases} {a_{n+1}}^2 - a_{n+1} - 2b_n + \dfrac{1}{4} = 0 \\ {a_n}^2 - a_n - 2b_{n-1} + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases}$$

辺々引くと

$${a_{n+1}}^2 - {a_n}^2 - (a_{n+1} - a_n) - 2(b_n - b_{n-1}) = 0$$

$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n) - (a_{n+1}-a_n) - 2a_n = 0 \quad (\because\ b_n - b_{n-1} = a_n)$$

$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n) - (a_{n+1}+a_n) = 0$$

$$(a_{n+1}+a_n)\{(a_{n+1}-a_n)-1\} = 0$$

$a_{n+1}+a_n > 0$ であるため，$a_{n+1}-a_n = 1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ …①

また，

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{1+2\sqrt{2b_1}}{2} - a_1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{2a_1}}{2} - a_1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}}}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

より，① は $n=1$ のときも成立する。

これより，数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 \left(=\dfrac{1}{2}\right)$，公差 1 の等差数列なので

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + (n-1) \\ &= n - \frac{1}{2}\ \cdots 答 \end{aligned}$$

**【戦略 2】**

**$y=x^2$ と $x^2+(y-p_n)^2={a_n}^2$ から連立して $y$ を消去し，$x$ の 4 次方程式を捌いていく路線です。**

【解 2】 (2) 部分的別解

$y=x^2$ と，円 $C_n : x^2+(y-p_n)^2={a_n}^2$ を連立して $y$ を消去すると

$x^2+(x^2-p_n)^2={a_n}^2$，すなわち

$$x^4-(2p_n-1)x^2+{p_n}^2-{a_n}^2=0\ \cdots(*)$$

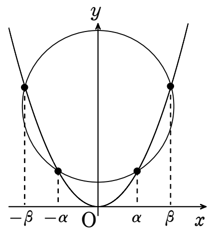
これが 4 つの実数解をもつとき，対称性から (*) の解は

$$x=\alpha,\ \beta,\ -\alpha,\ -\beta\ (0 \leqq \alpha < \beta)$$

と表せる。((図 1) 参照)

したがって，

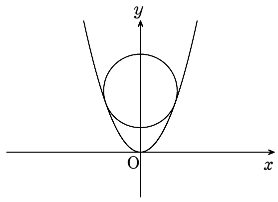
$$\begin{aligned} ((*)\text{ の左辺}) &= (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta) \\ &= (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2) \end{aligned}$$



(図 1)

さらに，(図 2) の状態のときは $\alpha=\beta$ であるため，

$((*)\text{ の左辺}) = (x^2-\alpha^2)^2$



(図 2)

よって，

$$x^4-(2p_n-1)x^2+{p_n}^2-{a_n}^2 = x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$$

は $x$ についての恒等式である。

ゆえに，$\begin{cases} -(2p_n-1) = -2\alpha^2 \\ {p_n}^2-{a_n}^2 = \alpha^4 \end{cases} \iff \begin{cases} p_n - \dfrac{1}{2} = \alpha^2 \\ {p_n}^2-{a_n}^2 = \alpha^4 \end{cases}$

$\alpha$ を消去すると，${p_n}^2-{a_n}^2 = \left(p_n - \dfrac{1}{2}\right)^2$

これを整理すると，${a_n}^2 = p_n - \dfrac{1}{4}$ を得る。

(以下【解 1】に準じる)

**【戦略 3】(3) について**

**円 $C_n$ と円 $C_{n+1}$ は外接することによる**

$$p_{n+1}-p_n=a_{n+1}+a_n$$

**という関係式，及び $a_n{}^2=p_n-\dfrac{1}{4}$ という関係式から $b_n$ を用いなくとも $a_n$ は用いられます。**

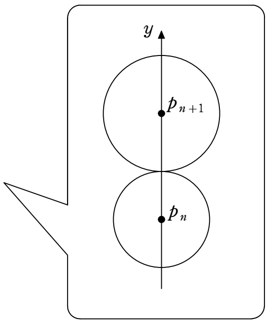
【解 3】(3) 部分的別解

（ $a_n{}^2=p_n-\dfrac{1}{4}$ を得るところまでは同じ ）

円 $C_n$ と円 $C_{n+1}$ は外接するので

(中心間距離)＝(半径の和)

$$p_{n+1}-p_n=a_{n+1}+a_n$$




$a_n{}^2=p_n-\dfrac{1}{4}$ より

$$\left(a_{n+1}{}^2+\frac{1}{4}\right)-\left(a_n{}^2+\frac{1}{4}\right)=a_{n+1}+a_n$$

$$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}+a_n$$

$a_{n+!}+a_n>0$ より

$$a_{n+1}-a_n=1$$

（ 以下【解 1】に準じる ）

【総括】

$y=x^2$ と $x^2+(y-p_n)^2=a_n{}^2$ を連立してどちらの文字を消すかについては

$x^2$ を消すのであれば，$y=x^2$（ $\geqq 0$ ）という条件がついてまわります。
「文字が死んだら遺産の整理」という言葉があり，文字が消えるときは生前持っていた条件を生き残る文字に引き継がせることは忘れないようにしたいところです。

$y$ を消すと $x$ の 4 次方程式となり次数は高くなりますが，対称性を味方につければ何とか捌ききれます。