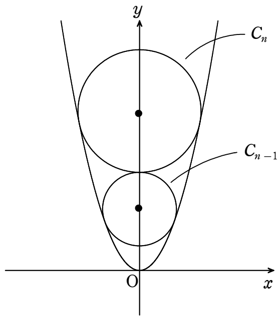
　放物線 $y=x^2$ に 2 点で接する半径 1 の円 C_1 を描く。この上方に円 C_1 に外接し，かつこの放物線に 2 点で接する円 C_2 を描く。
　以下同様に円 C_{n-1} の上方に円 C_{n-1} に外接し，この放物線に 2 点で接する円 C_n を描く。このとき，次の問に答えよ。
(1)　C_2 の半径を求めよ。
(2)　C_n の半径を求めよ。

＜ ’88 三重大 ＞

【戦略 1】

例題同様，中心を $(0,\ a_n)$，半径を r_n と設定します。

これにより，C_n の方程式が $x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$ と設定できます。



この円 C_n と $y=x^2$ が接するという状況について，x^2 を消去して y についての 2 次方程式と見る例題の【戦略 1】と同様の路線で考えてみます。

【解 1】

円 C_n の中心を $(0,\ a_n)$，半径を r_n とおく。（$a_n>0$，$r_n>0$）

このとき，円 C_n の方程式は

$$x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$$

これと $y=x^2$ を連立して x を消去すると

$$y+(y-a_n)^2=r_n{}^2$$

これを整理すると $y^2-(2a_n-1)y+a_n{}^2-r_n{}^2=0$ …(*)

$y=x^2$ と円 C_n が 2 点で接するための条件は，この y についての 2 次方程式が正の重解をもつことである。

(*) の判別式を D とすると，$D=(2a_n-1)^2-4(a_n{}^2-r_n{}^2)=0$

これより，$a_n=r_n{}^2+\dfrac{1}{4}$ …①

条件 (ii) より，$a_n-a_{n-1}=r_n+r_{n-1}$ …②

① を用いて，② から a_n を消去すると

$$r_n{}^2+\frac{1}{4}-\left(r_{n-1}{}^2+\frac{1}{4}\right)=r_n+r_{n-1}$$

これより，$(r_n+r_{n-1})(r_n-r_{n-1})=r_n+r_{n-1}$

これを整理すると，$(r_n+r_{n-1})(r_n-r_{n-1}-1)=0$

$r_n+r_{n-1}>0$ であるため，$r_n-r_{n-1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を得る。

条件 (i) も考えると，数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列であるため

$$r_n=n$$

したがって，① から，$a_n=n^2+\dfrac{1}{4}$

このとき，(*) の重解は

$$\begin{aligned} y&=2a_n-1\\ &=2\left(n^2+\frac{1}{4}\right)-1\\ &=2n^2-\frac{1}{2}\\ &>0\ (\because n=1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

であり，重解は正の値となる。

以上から，円 C_n の半径 r_n は，$r_n=n$ …答 であり，$r_2=2$ …答

【戦略 2】

$y=x^2$ と $x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$ を連立し，y を消去し，x の 4 次方程式から考える路線で考えてみます。

【解 2】 C_n と $y=x^2$ が接することについての部分的別解

$C_n: x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$

これと $y=x^2$ を連立して，y を消去すると

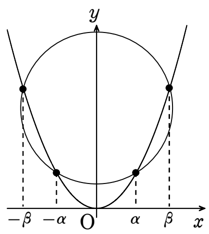
$$x^2+(x^2-a_n)^2=r_n{}^2$$

$$x^4-(2a_n-1)x^2+a_n{}^2-r_n{}^2=0 \cdots (★)$$

これが 4 つの実数解をもつとき，対称性から (★) の解は

$$x=\alpha,\ \beta,\ -\alpha,\ -\beta\quad (0\leqq\alpha<\beta)$$

と表せる。((図 1) 参照)



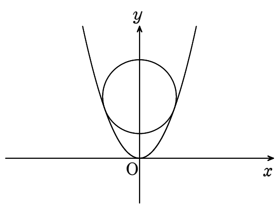
(図 1)

したがって，

$$\begin{aligned}((★)\text{の左辺}) &= (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)\\ &= (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)\end{aligned}$$

という形となり，さらに，(図 2) の状態のときは $\alpha=\beta$ であるため，

((★) の左辺)$=(x^2-\alpha^2)^2$ と表せる。



(図 2)

よって

$$x^4-(2a_n-1)x^2+a_n{}^2-r_n{}^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$$

は x についての恒等式である。

ゆえに，$\begin{cases}-(2a_n-1)=-2\alpha^2\\ a_n{}^2-r_n{}^2=\alpha^4\end{cases} \iff \begin{cases}a_n-\dfrac{1}{2}=\alpha^2\\ a_n{}^2-r_n{}^2=\alpha^4\end{cases}$

α を消去すると，$a_n{}^2-r_n{}^2=\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2$

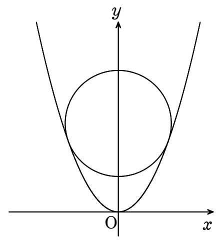
これを整理すると，$a_n=r_n{}^2+\dfrac{1}{4}$ を得る。

(以下【解 1】に準じる)

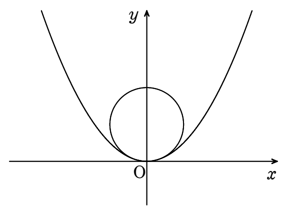
【総括】

例題の確認問題です。

放物線と円が接する状態としては，本問のように



という状態もあれば



という状態もあり得ます。

【類題２】ではこのあたりをどのように捌くかについても扱います。