放物線に接する外接円

y 軸上の正の部分に中心をもち，放物線 $y=x^2$ と 2 点で接する円の列 O_1，O_2，…，O_n，… を次の条件 (i)，(ii) を満たすように定める。

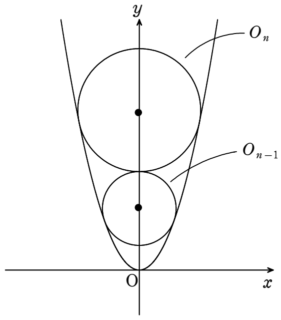
(i)　O_1 の半径は 1 である。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，O_n は O_{n-1} に外接し，O_n の中心の y 座標は O_{n-1} の中心の y 座標より大きい。

このとき，円 O_n の方程式を求めよ。

＜ ’88 大阪大 ＞

【戦略 1】



ひとまず O_n と $y=x^2$ が接するという状況を立式します。

O_n を立式するためには中心の座標と半径の設定が必要です。

そこで，中心を $(0,\ a_n)$，半径を r_n と設定します。

これにより，O_n の方程式が $x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$ と設定できます。

この円 O_n と $y=x^2$ が接するという状況についてはこれらを連立した $y+(y-a_n)^2=r_n{}^2$，すなわち

$$y^2-(2a_n-1)y+a_n{}^2-r_n{}^2=0$$

が正の重解をもつと翻訳します。

判別式 $D=0$ を整理すると，$a_n=r_n{}^2+\dfrac{1}{4}$ という関係式を得ます。

一方，O_n，O_{n-1} が外接するという条件 (ii) から $a_n-a_{n-1}=r_n+r_{n-1}$ という関係式を得ます。

a_n を消去し，r_n に関する漸化式を得れば半径が分かり，同時に a_n も分かるため中心の座標も Get できるため解決です。

【解 1】

円 O_n の中心を $(0,\ a_n)$，半径を r_n とおく。($a_n>0$，$r_n>0$)

このとき，円 O_n の方程式は

$$x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$$

これと $y=x^2$ を連立して x を消去すると

$$y+(y-a_n)^2=r_n{}^2$$

これを整理すると $y^2-(2a_n-1)y+a_n{}^2-r_n{}^2=0$ …(*)

$y=x^2$ と円 O_n が 2 点で接するための条件は，この y についての 2 次方程式が正の重解をもつことである。

(*) の判別式を D とすると，$D=(2a_n-1)^2-4\,(a_n{}^2-r_n{}^2)=0$

これより，$a_n=r_n{}^2+\dfrac{1}{4}$ …①

条件 (ii) より，$a_n-a_{n-1}=r_n+r_{n-1}$ …②

① を用いて，② から a_n を消去すると

$$r_n{}^2+\frac{1}{4}-\left(r_{n-1}{}^2+\frac{1}{4}\right)=r_n+r_{n-1}$$

これより，$(r_n+r_{n-1})\,(r_n-r_{n-1})=r_n+r_{n-1}$

これを整理すると，$(r_n+r_{n-1})\,(r_n-r_{n-1}-1)=0$

$r_n+r_{n-1}>0$ であるため，$r_n-r_{n-1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を得る。

条件 (i) も考えると，数列 $\{r_n\}$ は初項 1，公差 1 の等差数列であるため

$$r_n=n$$

したがって，① から，$a_n=n^2+\dfrac{1}{4}$

このとき，(*) の重解は

$$\begin{aligned} y&=2a_n-1\\ &=2\left(n^2+\frac{1}{4}\right)-1\\ &=2n^2-\frac{1}{2}\\ &>0\ (\because n=1,\ 2,\ \cdots) \end{aligned}$$

であり，重解は正の値となる。

以上から，円 O_n の方程式は

$$x^2+\left(y-n^2-\frac{1}{4}\right)^2=n^2 \ \cdots 答$$

【戦略2】

y を消去し，x の 4 次方程式として見ると，方程式の解が分かりやすく意味をもちます。

【解2】 O_n と $y=x^2$ が接することについての部分的別解

$O_n : x^2+(y-a_n)^2=r_n{}^2$

これと $y=x^2$ を連立して，y を消去すると

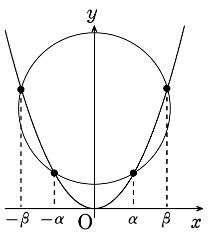
$$x^2+(x^2-a_n)^2=r_n{}^2$$

$$x^4-(2a_n-1)x^2+a_n{}^2-r_n{}^2=0 \quad \cdots (\bigstar)$$

これが 4 つの実数解をもつとき，対称性から $(\bigstar)$ の解は

$$x=\alpha,\ \beta,\ -\alpha,\ -\beta \quad (0 \leqq \alpha < \beta)$$

と表せる。((図1) 参照)



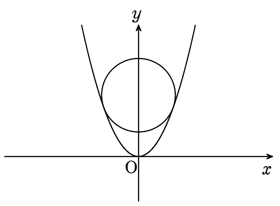
(図1)

したがって，

$$\begin{aligned}((\bigstar)\text{の左辺}) &= (x-\alpha)(x+\alpha)(x-\beta)(x+\beta)\\ &= (x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)\end{aligned}$$

という形となり，さらに，(図2) の状態のときは $\alpha=\beta$ であるため，

$((\bigstar)\text{の左辺})=(x^2-\alpha^2)^2$ と表せる。



(図2)

よって

$$x^4-(2a_n-1)x^2+a_n{}^2-r_n{}^2=x^4-2\alpha^2x^2+\alpha^4$$

は x についての恒等式である。

ゆえに，$\begin{cases}-(2a_n-1)=-2\alpha^2\\ a_n{}^2-r_n{}^2=\alpha^4\end{cases} \iff \begin{cases}a_n-\dfrac{1}{2}=\alpha^2\\ a_n{}^2-r_n{}^2=\alpha^4\end{cases}$

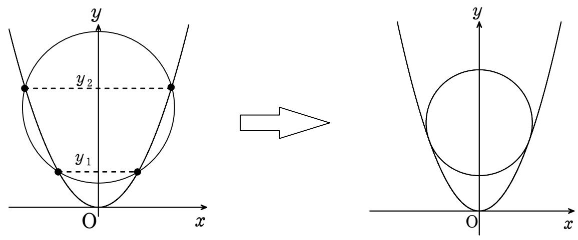
α を消去すると，$a_n{}^2-r_n{}^2=\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2$

これを整理すると，$a_n=r_n{}^2+\dfrac{1}{4}$ を得る。

(以下【解1】に準じる)

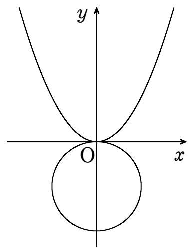
【総括】

【解1】の y に関する 2 次方程式 $(*)$ が重解をもつということは



というように，y_1 と y_2 という 2 つの解が重なるというイメージです。

接するというワードから，機械的に判別式で処理したという人は



というシチュエーションが出てこない理由を考えてみてください。

【解2】は大袈裟かもしれませんが，連立して出てくる方程式の解の意味は捉えやすいでしょう。

一般に放物線と円の共有点の個数についてキッチリと記述しようと思うと結構ウルサイ問題であるということは心構えとしてもっておきましょう。