定点からの見込む角が等しくなる点の軌跡

座標平面上の 3 点 A$(1,0)$，B$(-1,0)$，C$(0,-1)$ に対し，

$$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，P$\neq$A，B，C とする。

＜ ’08 東京大 ＞

【戦略】

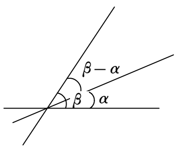
座標平面において角度を扱う方法としては

①：ベクトルの内積を利用して $\cos$ 経由で扱う

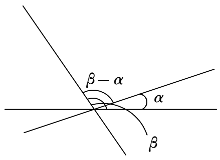
②：傾きと $\tan$ の関係を利用して $\tan$ 経由で扱う

という 2 路線が考えられます。

② の $\tan$ 経由の場合，角度に向きを与え，反時計回りに測ることでなす角を統一的に扱うことができます。



(図 A)



(図 B)

ただ，通常「なす角」と言えば鋭角の方を指し，(図 B) のように $\beta-\alpha$ が鈍角として出てくる場合 ($\tan(\beta-\alpha)$ が負の値となった場合)，π から引くことで出てくる鋭角をなす角とみなします。

今回与えられている $\angle\mathrm{APC}$，$\angle\mathrm{BPC}$ というのは図形的な角度であり，符号つきの角度ではなく，上記の $\tan$ 経由での処理はウルサイことになりそうです。

0 から π までの範囲では，$\alpha=\beta \iff \cos\alpha=\cos\beta$ であり，$\cos$ の値は 1 対 1 に対応しますから，処理上の重さはともかく ① の路線で考えた方がマシです。

P(X,Y) **とおき，$\cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$，すなわち**

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

とつなぎ，これを処理すると

$$\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}\ (X^2-X+Y^2+Y)=\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}\ (X^2+X+Y^2+Y)$$

という等式までは行きつけると思います。

ここから，両辺を 2 乗したいのですが，勝手に 2 乗すると同値性が崩れてしまいます。

2 乗しても同値性が崩れないためには，

X^2-X+Y^2+Y，X^2+X+Y^2+Y **が同符号**

であることが必要となってきます。

この下で，両辺を 2 乗して

$$(X^2+Y^2+1+2X)(X^2-X+Y^2+Y)^2=(X^2+Y^2+1-2X)(X^2+X+Y^2+Y)^2$$

を捌いていきますが，非常に目がチカチカしますから，

$$P=X^2+Y^2+1,\ Q=X^2+Y^2+Y$$

と共通している部分については置き換えをして，少しでも負担を減らしましょう。

【解答】

P(X,Y) として，X，Y が満たすべき条件を求める。

原点を O$(0,0)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-X\\-Y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-X\\-Y\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-X\\-1-Y\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=-X(1-X)-Y(-1-Y)\\&=X^2-X+Y^2+Y\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=-X(-1-X)-Y(-1-Y)\\&=X^2+X+Y^2+Y\end{aligned}$$

$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ であるとき，$\cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}$ であるから

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}$$

よって，

$$\frac{X^2-X+Y^2+Y}{\sqrt{(1-X)^2+Y^2}}=\frac{X^2+X+Y^2+Y}{\sqrt{(1+X)^2+Y^2}}$$

$$\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}\ (X^2-X+Y^2+Y)=\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}\ (X^2+X+Y^2+Y)$$

ここで，この等式が成立するためには

X^2-X+Y^2+Y，X^2+X+Y^2+Y が同符号

である必要がある。

したがって，

$$\begin{cases}X^2-X+Y^2+Y\geqq 0\\X^2+X+Y^2+Y\geqq 0\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}X^2-X+Y^2+Y\leqq 0\\X^2+X+Y^2+Y\leqq 0\end{cases}$$

すなわち

$$\begin{cases}\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\\[2mm]\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y+\dfrac{1}{2}\right)^2\geqq\dfrac{1}{2}\end{cases}\ \text{または}\ \begin{cases}\left(X-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\\[2mm]\left(X+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(Y+\dfrac{1}{2}\right)^2\leqq\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad\cdots(*)$$

を満たす必要がある。

この下で，

$$\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}\ (X^2-X+Y^2+Y)=\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}\ (X^2+X+Y^2+Y)$$

の両辺を 2 乗しても同値性は失われない。

ゆえに

$$(X^2+Y^2+1+2X)(X^2-X+Y^2+Y)^2=(X^2+Y^2+1-2X)(X^2+X+Y^2+Y)^2$$

$P=X^2+Y^2+1$，$Q=X^2+Y^2+Y$ とおくと

$$(P+2X)(Q-X)^2=(P-2X)(Q+X)^2$$

$$(P+2X)(Q^2-2QX+X^2)=(P-2X)(Q^2+2QX+X^2)$$

$$PQ^2-2PQX+PX^2+2XQ^2-4QX^2+2X^3=PQ^2+2PQX+PX^2-2XQ^2-4QX^2-2X^3$$

$$4XQ^2-4PQX+4X^3=0$$

$$XQ^2-PQX+X^3=0$$

$$X(Q^2-PQ+X^2)=0$$

$$X=0 \text{ または } Q(Q-P)+X^2=0$$

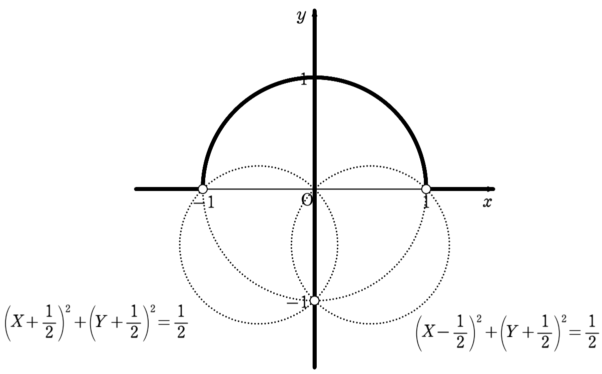
$$X=0 \text{ または } (X^2+Y^2+Y)(Y-1)+X^2=0$$

$$X=0 \text{ または } X^2Y+Y^3-Y=0$$

$$X=0 \text{ または } Y(X^2+Y^2-1)=0$$

$$X=0 \text{ または } Y=0 \text{ または } X^2+Y^2=1$$

(X, Y) は $(*)$ を満たすことに注意すると，求める点 P の軌跡は以下の (図 1) の太線部分。



(図 1)

式で表すと

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \ (y>0) \\ x=0 \ (y\neq -1) \\ y=0 \ (x<-1,\ 1<x) \end{cases} \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

直感的に結論の (図 1) が分かるかもしれませんが，

それ以外の部分には点 P は存在し得ない

ということを言わなければならないため，キッチリと解答を作ろうとすると非常に厄介です。

一般的に「式自体の処理的な負担面」では通常 tan 経由の処理の方が軽くなる傾向にありますが，今回においては「構図による場合分けの分類の煩雑さ」を考えると積極的に行く気にはなれません。

内積経由の処理では，恐らく

$$\frac{X^2-X+Y^2+Y}{\sqrt{(1-X)^2+Y^2}}=\frac{X^2+X+Y^2+Y}{\sqrt{(1+X)^2+Y^2}}$$

まで辿り着けると思いますが，この場合，ここから手が止まってしまう受験生がほとんどだと思います。

2 乗することにより同値性が崩れることへの意識もそうですが，何より

「置き換えにより目に優しく処理する」

という言われれば当たり前の工夫が，完答できるかどうかを大きく左右することになるでしょう。

本問は文系での出題で，出題者がどういう解答を期待していたのかは不明ですが，東大受験生と言えども大半は

直感的に結論を出し，直感的にそれ以外あり得ないと否定をする

という直感に頼った答案になってしまっていたのではないかと推察します。