四面体 OABC が次の 2 つの条件

(i)　$OA \perp BC$，$OB \perp AC$，$OC \perp AB$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしているとき，正四面体であることを示せ。

＜ '03 京都大 ＞

【戦略】

ひとまず O を始点にとり，3 本の主役ベクトルを設定します。

条件 (i) を捌いていくと $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ **が言えます。**

条件 (ii) については，$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCA$ **の部分については**

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2-(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})^2}$$

と言えますが，4 枚目の面 $\triangle ABC$ **については**

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

となりますが，これを O を始点にとると

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2\,|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}|^2-\{(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})\}^2}$$

ということになり，大騒ぎになります。

ひとまず O を始点にとった場合

$$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCA$$

から言える

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2-(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})^2}$$

までで留めておき，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ **と合わせて得られる**

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$$

という結論でひとまず一服します。

ただ，よく考えてみると，O，A，B，C は与えられた条件からして対等な立場の頂点です。

O を始点にとって $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ **という結論が得られるのであれば**

A を始点にとれば $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

B を始点にとれば $|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|$

C を始点にとれば $|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$

という結論が得られるに決まっています。

【解答】

条件 (i) より

$$\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0\end{cases}\iff\begin{cases}\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0\\\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=0\\\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0\end{cases}$$

すなわち，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ …①

条件 (ii) より

$\triangle OAB=\triangle OBC=\triangle OCA$ であるため

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2-(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2-(\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})^2}$$

① より，$|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2|\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OC}|^2|\overrightarrow{OA}|^2$

これより，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|$ を得る。

ここで，与えられた条件は

(i)：各ねじれの位置同士の辺が直交する

(ii)：4 枚の面の面積が等しい

ということであり，4 頂点 O，A，B，C の対等性から，同様にして

A を始点にとれば　$|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$

B を始点にとれば　$|\overrightarrow{BO}|=|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{BC}|$

C を始点にとれば　$|\overrightarrow{CO}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{CB}|$

ということが言える。

以上から，

$$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BC}|$$

であることが言えるため，四面体 OABC は正四面体である。

【総括】

「4 枚目の△ABC の面積が等しいということは使わなかったんですか？」という質問がありますが，ちゃんと使いましたよ。

4 頂点 O，A，B，C の対等性から，同様にして

というくだりの「同様にして」の中で使っています。

A を始点にとったときの条件 (ii) の見方は $\triangle AOB=\triangle ABC=\triangle ACO$ ですから。