ABCD を四面体とするとき，次の (1)，(2)，(3) を証明せよ。

(1) AB⊥CD ならば，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ である。

(2) AB⊥CD ならば，$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ である。

(3) AB⊥CD，AC⊥BD，AB＝CD，AC＝BD，AD＝BC ならば ABCD は正四面体である。

＜ ’87 奈良女子大 ＞

【戦略】

ひとまず $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ と，A を始点にとり，3 本の主役ベクトルを設定します。

(1) **垂直条件を内積として表現すれば，$\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0$，すなわち**

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$$

を得ます。

これは，示すべき $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ という関係式に他なりません。

(2) $AC^2+BD^2=|c|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2$， $AD^2+BC^2=|\vec{d}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2$

ですから， $\begin{cases} AC^2+BD^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d} \\ AD^2+BC^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c} \end{cases}$

であり，(1) の関係式を用いれば，即題意は示されます。

(3) AB⊥CD **という条件の使い方は，(2) の結論である**

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$$

と翻訳すればよいでしょう。

AC⊥BD **という条件の使い方は，別に (1)，(2) と同じようなことをやればいいんですが，よく観察し，**

「B，C の立場を入れ替えればよい」

と看破すれば

$$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$$

と翻訳できるでしょう。

長さの等式については目がチカチカするため

$$\begin{cases} AB=CD=x \\ AC=BD=y \\ AD=BC=z \end{cases}$$

と置きなおしてやれば

$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2 \iff 2y^2=2z^2$ **で，** $y=z$

$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2 \iff 2x^2=2z^2$ **で，** $x=z$

ですから，$x=y=z$ となり，6 本の辺全てが等しいことが言え，正四面体であることが示せます。

【解答】

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

(1) AB⊥CD のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$，すなわち $\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0$

これより，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ を得て，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ が成り立つことが示された。

(2) $AC^2+BD^2=|c|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}$

$AD^2+BC^2=|\vec{d}|^2+|\vec{c}-\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}$

$$\begin{aligned}(AC^2+BD^2)-(AD^2+BC^2)&=2(\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{d})\\&=0\ (\because (1))\end{aligned}$$

よって，$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$ が成り立つ。

(3) 条件より $\begin{cases} AB=CD=x \\ AC=BD=y \\ AD=BC=z \end{cases}$ とおく。

AB⊥CD なので，(2) から $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$

すなわち，$y^2+y^2=z^2+z^2$ で，y，z は正の値なので

$$y=z \quad \cdots①$$

一方，AC⊥BD なので，(1)，(2) と同様にして

$$AB^2+CD^2=AD^2+CB^2$$

すなわち，$x^2+x^2=z^2+z^2$ で，x，z は正の値なので

$$x=z \quad \cdots②$$

①，② より，$x=y=z$

これより，AB＝AC＝AD＝BC＝BD＝CD が言えるため

四面体 ABCD は正四面体である。

【総括】

例題で示した

$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2 \Longrightarrow \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$$

の逆の命題

$$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC} \Longrightarrow |\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2$$

は，本問と同様にして示せるため

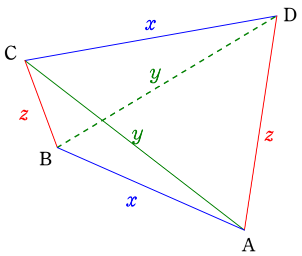
$$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2 \iff \overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$$

という同値関係であることが分かります。

なお，本問の (3) で，垂直条件を除いた

$$AB=CD,\ AC=BD,\ AD=BC$$

だけだと，正四面体とはなりません。



このように，ねじれの位置同士の長さが等しいような四面体は，各面が合同な 4 つの面で構成され，

「等面四面体」

と呼ばれます。

等面四面体はそれはそれでテーマ性をもった話題です。