四面体 ABCD において，等式 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2$ が成り立つならば，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ であることを証明せよ。

＜ '12 北里大 ＞

【戦略】

空間ベクトルの扱いの基本中の基本

1 つの始点，3 つの基底

というセオリーに従い，A を始点にとり，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ という 3 つのベクトルを主役のベクトル（基底）とし，登場人物をこれら 3 本のベクトルで表現していきます。（【解答】では $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおいて進めます。）

与えられた条件式をほぐすと，手なりに $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ が得られるはずです。

示すべき内容は，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，すなわち $\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$ ということであり

先ほど得た $\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}$ という関係式と同値なものです。

【解答】の記述としては

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$ を計算していき，条件を使ったら「結果的に 0 となる」

というニュアンスでまとめていきます。

【解答】

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2$ が成り立っているとき

$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}|^2$，すなわち

$$|\vec{b}|^2+|\vec{d}-\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2+|\vec{d}-\vec{b}|^2$$

が成り立つ。

これより，$|\vec{b}|^2+|\vec{d}|^2+|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}|^2+|\vec{d}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{d}$

ゆえに，

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{d}\ \cdots ①$$

が成り立つ。

さて，このとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}&=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})\\&=\vec{c}\cdot\vec{d}-\vec{b}\cdot\vec{d}\\&=0\ (\because ①)\end{aligned}$$

よって，$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ である。

【総括】

ウォーミングアップ的な問題で，基本の確認です。

平面ベクトルの式変形における指針「1 つの始点，2 つの基底」
空間ベクトルの式変形における指針「1 つの始点，3 つの基底」

という指針が自分のものになっているかのバロメーターとしてください。