平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ が

$$|\vec{a}|=\sqrt{2},\ \ |\vec{b}|=\sqrt{3},\ \ |\vec{p}|=\sqrt{5},\ \ \vec{a}\cdot\vec{p}=2,\ \ \vec{b}\cdot\vec{p}=3$$

を満たすとき，$|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。ただし，ベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対して，$\vec{u}\cdot\vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表す。

＜ '86 一橋大 ＞

【戦略 1】

見た目ベクトルの問題なので，まずは見た目通りベクトルの問題として処理していきます。

平面ベクトルでは「1 つの始点，2 つの基底」というセオリーに従って，$\vec{a}$, $\vec{b}$ を基底と見て，$\vec{p}$ を $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ と $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表していき，条件を翻訳していきます。

ただ，そのためには $\vec{a}$, $\vec{b}$ が 1 次独立であることを言う必要があります。まずはそれをことわるところからスタートします。

【解 1】

$\vec{a}\parallel\vec{b}$ と仮定する。

すると，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ のなす角と，$\vec{b}$ と $\vec{p}$ のなす角は等しい。
（それを α とする）

$$\begin{aligned}|\vec{a}\cdot\vec{p}|:|\vec{b}\cdot\vec{p}|&=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\alpha:|\vec{b}|\,|\vec{p}|\cos\alpha\\&=|\vec{a}|:|\vec{b}|\\&=\sqrt{2}:\sqrt{3}\end{aligned}$$

これは条件 $\vec{a}\cdot\vec{p}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{p}=3$ に矛盾する。

よって，$\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ である。

ゆえに，$\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}$ とおける。

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{p}&=x|\vec{a}|^2+y(\vec{a}\cdot\vec{b})\\&=2x+y(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

であり，条件から $2x+y(\vec{a}\cdot\vec{b})=2$ …①

また，

$$\begin{aligned}\vec{b}\cdot\vec{p}&=x(\vec{a}\cdot\vec{b})+y|\vec{b}|^2\\&=x(\vec{a}\cdot\vec{b})+3y\end{aligned}$$

であり，条件から $x(\vec{a}\cdot\vec{b})+3y=3$ …②

$$\begin{aligned}|\vec{p}|^2&=\vec{p}\cdot\vec{p}\\&=(x\vec{a}+y\vec{b})\cdot\vec{p}\\&=x(\vec{a}\cdot\vec{p})+y(\vec{b}\cdot\vec{p})\\&=2x+3y\end{aligned}$$

1 つだけ $\vec{p}$ を残すのが少し難しいですかね。

であり，条件から $2x+3y=5$ …③

②，③ より y を消去すると，$x=\dfrac{2}{2-(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ …④ を得る。

一方，①，③ より x を消去すると $y=\dfrac{3}{3-(\vec{a}\cdot\vec{b})}$ …⑤

③ に ④，⑤ を代入して，$\dfrac{4}{2-(\vec{a}\cdot\vec{b})}+\dfrac{9}{3-(\vec{a}\cdot\vec{b})}=5$

分母を払って整理すると $5(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-12(\vec{a}\cdot\vec{b})=0$ で，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\ \dfrac{12}{5}$

$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\,\vec{a}\cdot\vec{b}\\&=5-2(\vec{a}\cdot\vec{b})\end{aligned}$$

ゆえに，$|\vec{a}-\vec{b}|^2=5$ または $\dfrac{1}{5}$

よって，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ …答

【戦略 2】

同じくベクトルですが，成分を用いてやってみます。
成分を持ち出すということは，多かれ少なかれ座標の路線とかぶることにはなります。

まずは $\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ **と設定して，条件を翻訳していきます。**

【解 2】

x 軸の正の方向が $\vec{p}$ と同じ向きであるように設定すると $\vec{p}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ となる。

このとき，$\vec{a}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ とおき，$y>0$ としても一般性を失わない。

すると，

$$|\vec{a}|=\sqrt{2} \text{ より，} x^2+y^2=2 \cdots ①$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{3} \text{ より，} u^2+v^2=3 \cdots ②$$

$\vec{a}\cdot\vec{p}=2$ より，$\sqrt{5}x=2$ で，$x=\dfrac{2}{\sqrt{5}} \cdots ③$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=3$ より，$\sqrt{5}u=3$ で，$u=\dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdots ④$

③ を ① に代入して $\dfrac{4}{5}+y^2=2$ で，$y>0$ だから $y=\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ を得る。

④ を ① に代入して $\dfrac{9}{5}+v^2=3$ で，$v=\pm\sqrt{\dfrac{6}{5}}$ を得る。

$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}x-u\\y-v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{pmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

よって，$|\vec{a}-\vec{b}|=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ または $\sqrt{5}$ …答

【戦略 3】

座標を設定してやってみます。

【解 2】とかぶる部分はありますので，ここでは「変数の設定」を工夫してみます。

$\vec{p}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ **と設定するのはいいと思います。**

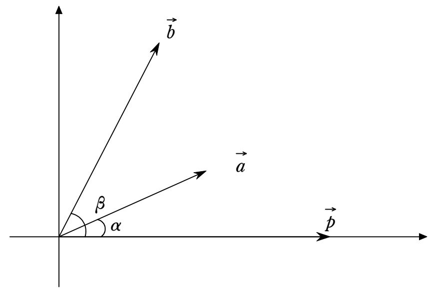
ここでは，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ **なので，**$\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\alpha\\\sqrt{2}\sin\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos\beta\\\sqrt{3}\sin\beta\end{pmatrix}$ **と設定します。**

もちろん，三角関数を持ち出したので，その扱いには習熟している必要がありますが，最初の設定のおかげで，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ **を翻訳する必要がなくなったため，**$\vec{a}\cdot\vec{p}=2$，$\vec{b}\cdot\vec{p}=3$ **であることを処理すればよくなります。**

【解 3】

条件から

$\vec{p}=\begin{pmatrix}\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\cos\alpha\\\sqrt{2}\sin\alpha\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\cos\beta\\\sqrt{3}\sin\beta\end{pmatrix}$ とおける。



$\vec{a}\cdot\vec{p}=\sqrt{10}\cos\alpha$ で，条件より，$\sqrt{10}\cos\alpha=2$

これより，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{10}}$ で，$\sin\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$（複号任意）

一方 $\vec{b}\cdot\vec{p}=\sqrt{15}\cos\beta$ で，条件より $\sqrt{15}\cos\beta=3$

これより，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$ で，$\sin\beta=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}$（複号任意）

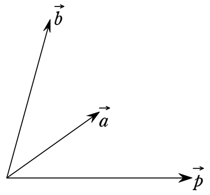
$$\begin{aligned}|\vec{a}-\vec{b}|^2&=(\sqrt{2}\cos\alpha-\sqrt{3}\cos\beta)^2+(\sqrt{2}\sin\alpha-\sqrt{3}\sin\beta)^2\\&=5-2\sqrt{6}\,(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\&=5-2\sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3}{\sqrt{15}}\pm\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}}\right)\\&=5 \text{ または } \frac{1}{5}\end{aligned}$$

よって，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{5}$ または $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ …答

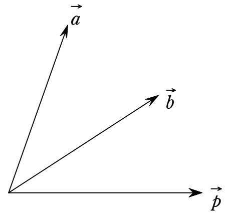
【総括】

分野の設定としてはベクトルか座標でしょう。

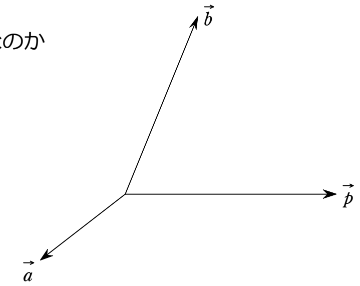
幾何はやりたくはありません。なぜなら



なのか



なのか



など，余弦定理などの幾何の定理を使おうと思ったら，三角形の内角の大きさによる場合分けが生じてしまい，大騒ぎになるからです。

一応，今回は

$0<\vec{a}\cdot\vec{p}<\vec{b}\cdot\vec{p}$ であるため，$\vec{a}$，$\vec{p}$ のなす角を θ_1，$\vec{b}$，$\vec{p}$ のなす角を θ_2 とすると，θ_1，θ_2 は鋭角です。

$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}||\vec{p}|\cos\theta_1$ であり，条件より

$$2=\sqrt{10}\cos\theta_1$$

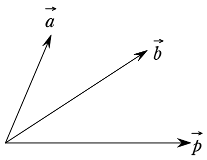
なので，$\cos\theta_1=\dfrac{2}{\sqrt{10}}\left(=\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right)$

$\vec{b}\cdot\vec{p}=|\vec{b}||\vec{p}|\cos\theta_2$ であり，条件より

$$3=\sqrt{15}\cos\theta_2$$

なので，$\cos\theta_2=\dfrac{3}{\sqrt{15}}\left(=\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)$

$0<\cos\theta_1<\cos\theta_2$ であるため，$0<\theta_2<\theta_1<\dfrac{\pi}{2}$ ですから，状況的には



ということになり，この後幾何的に処理しきることも可能ですが，結果的に紹介した解法に近しいものとなり，劇的に負担が減るわけではなさそうです。

幾何のメリットは「早く処理できること」であり，デメリットは「図形的に処理するために制約が生じる（一般化できるかは別問題）」，「発想力・観察力が必要」ということです。

これらを天秤にかけて，方針や分野を選択しましょう。