p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a，b，c，d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a\geqq b\geqq c\geqq d$$

を満たすとき，a，b，c，d を p を用いて表せ。

＜ '07 京都大 ＞

【戦略 1】

和に関する条件と，積についての条件に目を付けて

$$\begin{cases} a+d=-(b+c) \\ ad=bc-p \end{cases}$$

と見て，解と係数の関係を用いるという作戦が目に付きます。

これにより，a，d が

$$X^2+(b+c)X+bc-p=0$$

の解ということになります。

よって，$a^2+(b+c)a+bc-p=0$ を満たすことになり

$$(a+b)(a+c)=p$$

という関係式を得ます。

これは

$$(\text{整数})\times(\text{整数})=(\text{素数})$$

という強力な形です。

$a+b\geqq a+c$ **であることから**

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b=-1 \\ a+c=-p \end{cases}$$

という場合が考えられますが，$a+b\geqq a+c\geqq d+c=-(a+b)$

すなわち $2(a+b)\geqq 0$ で，$a+b\geqq 0$ であることを考えると

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases}$$

に限られます。

これより， $\begin{cases} b=p-a \\ c=1-a \\ d=-a-b-c=a-p-1 \end{cases}$

と，b，c，d が a，p のみで表せることになり，$a\geqq b\geqq c\geqq d$ に代入すると

$$a\geqq p-a\geqq 1-a\geqq a-p-1$$

であり，これを整理すると

$$1\leqq p\leqq 2a\leqq p+2$$

となります。

奇素数 p，$p+2$ に挟まれる偶数 $2a$ は $p+1$ となるしかなく，$a=\dfrac{p+1}{2}$ と求まり，b，c，d も p で表せることになり，解決です。

【解 1】

$\begin{cases} a+d=-(b+c) \\ ad=bc-p \end{cases}$ より，解と係数の関係から

$$X^2+(b+c)X+bc-p=0$$

が整数解 a，d をもつことになる。

ゆえに，$a^2+(b+c)a+bc-p=0$，すなわち

$$(a+b)(a+c)=p \quad \cdots(*)$$

を満たす。

今，条件 $a\geqq b\geqq c\geqq d$ より，$a+b\geqq a+c$ …①

また，再び条件 $a\geqq b\geqq c\geqq d$ より，$a+c\geqq d+c$ …②

条件 $a+b+c+d=0$ より，② $\Leftrightarrow$ $a+c\geqq -(a+b)$ …③

①，③ より，$a+b\geqq -(a+b) \Leftrightarrow 2(a+b)\geqq 0 \Leftrightarrow a+b\geqq 0$ …④

①，④ に注意すると，$(*)$ から

$$\begin{cases} a+b=p \\ a+c=1 \end{cases}$$

を得る。

これにより，$\begin{cases} b=p-a \\ c=1-a \end{cases}$ …(☆) で

$$\begin{aligned} d&=-a-b-c \\ &=-a-(p-a)-(1-a) \\ &=a-p-1 \quad \cdots(★) \end{aligned}$$

条件 $a\geqq b\geqq c\geqq d$ に (☆)，(★) を代入すると

$$a\geqq p-a\geqq 1-a\geqq a-p-1$$

これを整理すると，$1\leqq p\leqq 2a\leqq p+2$ となる。

p は 3 以上の素数という条件から，p，$p+2$ は奇数である。

ゆえに，奇数 p，$p+2$ に挟まれる $2a$ という偶数は $p+1$ となるしかない。

これより，$2a=p+1$，すなわち $a=\dfrac{p+1}{2}$

(☆)，(★) に代入し，$b=\dfrac{p-1}{2}$，$c=\dfrac{1-p}{2}$，$d=-\dfrac{p+1}{2}$

以上から，a，b，c，d を p で表すと

$$a=\frac{p+1}{2},\ b=\frac{p-1}{2},\ c=\frac{1-p}{2},\ d=-\frac{p+1}{2} \quad \cdots\text{答}$$

【戦略 2】戦略のみ

条件 1 つで 1 文字消去という言葉に従い

$$d=-(a+b+c)$$

と，文字消去を狙ってみます。

$$ad-bc+p=0$$

に代入すると

$$-a(a+b+c)-bc+p=0$$

$$a(a+b+c)+bc=p$$

$$a^2+(b+c)a+bc=p$$

$$(a+b)(a+c)=p$$

を得て，後は【解 1】に準じます。

【総括】

どこから手を付ければよいのか見当がつかないかもしれませんが，今回の p が奇素数であることから，

・奇数であること
・素数であること (約数が拾いきれる)

がどこかで効いてくることは身構えたいところで，特に，約数が拾いきれるということを見越すと，積の形をつくることを狙いたいところです。

自分自身は，最初の一手で形が崩れることと「１文字消去したところで焼け石に水感」が強いため，文字消去は敬遠し，和と積という対称式の形を活かす【解 1】の路線が目に付きましたが，【解 2】のように文字消去でも急所に合流します。