2022 年度 東北大学 理系 第 2 問

a を実数とし，実数 x の関数 $f(x)=(x^2+3x+a)(x+1)^2$ を考える。

(1) $f(x)$ の最小値が負となるような a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $a<2$ のとき，$f(x)$ は 2 つの極小値をもつ。このとき，$f(x)$ が極小となる x の値を α_1，α_2 $(\alpha_1<\alpha_2)$ とする。$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ を示せ。

(3) $f(x)$ が $x<\beta$ において単調減少し，かつ，$x=\beta$ において最小値をとるとする。このとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

＜ ’22 東北大 ＞

【戦略】

後々のために $A(x)=x^2+3x+a$，$B(x)=(x+1)^2$ **と記号をふります。**

(1) **微分して最小値を立式化するのは大変です。**

よく観察してみると，$A(x)\geqq 0$ だと最小値が負どころの話ではなくなってしまいます。

なので，$A(x)<0$ という x が $x\neq -1$ で存在しないといけません。
（※ $A(-1)<0$ **だとしても，$f(-1)$ は負とならない**）

よって，$y=A(x)$ という放物線が x 軸と 2 点を共有するので

$$\text{判別式 } D>0$$

ということになります。

一応，「$A(x)\geqq 0$ だとマズいよね」という必要条件なので，十分性も確認しておきます。（とはいっても，ほぼ自明）

(2) $f'(x)=(x+1)(4x^2+11x+2a+3)$ **と計算し，**

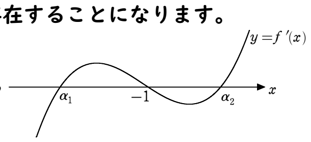
$$g(x)=4x^2+11x+2a+3$$

とおきます。

$a<2$ **のとき，$g(-1)=2a-4<0$ なので，** $\begin{cases} g(\alpha_1)=g(\alpha_2)=0 \\ \alpha_1<-1<\alpha_2 \end{cases}$ **となる**

α_1，α_2 **が存在することになります。**

したがって，



というグラフを基に

$f(x)$ **の増減表が**

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↘	極小	↗

と

かけるでしょう。

確かに，$f(\alpha_1)$，$f(\alpha_2)$ という 2 つの極小値が確認できます。

$f(\alpha_2)-f(\alpha_1)$ **を計算するのは大変ですから，** $\begin{cases} A(\alpha_2)-A(\alpha_1) \\ B(\alpha_2)-B(\alpha_1) \end{cases}$ **を計算していきます。**

詳しい計算結果は解答の中でやりますが，

$$A(\alpha_1)<A(\alpha_2)<0<B(\alpha_2)<B(\alpha_1)$$

が得られるため，

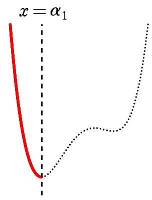
$$A(\alpha_1)B(\alpha_1)<A(\alpha_2)B(\alpha_2)$$

すなわち

$$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$$

となります。

(3) $a<2$ **だと (2) の考察から $f(x)$ の概形が**



という概形になり，題意の β は $\beta=\alpha_1$ であることが分かります。

つまり，$a<2$ は題意のようにうまく β をとれるわけです。

「じゃあ $a\geqq 2$ だとどうなの？」という頭の流れになると思います。

場合分けの基準は $g(x)$ の符号がどうなるかという部分です。

【解答】

(1) $\begin{cases} A(x)=x^2+3x+a \\ B(x)=(x+1)^2 \end{cases}$ とする。

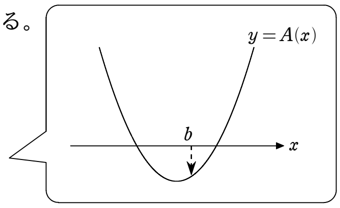
$B(x) \geqq 0$ より，$A(x) \geqq 0$ が任意の x で成立してしまうと
$f(x)\,(=A(x)\,B(x))$ は常に 0 以上の値となり，最小値が負となることはない。

よって，$A(x)<0$ を満たす実数 x が $x \fallingdotseq -1$ として存在する必要がある。

$A(x)=0$，すなわち $x^2+3x+a=0$ の判別式を D として
$D>0$ となる必要があり

$$D=9-4a>0$$

すなわち，$a<\dfrac{9}{4}$ である必要がある。



逆にこのとき，
$A(b)<0$ を満たす $b\,(\fallingdotseq -1)$ が存在し，$f(b)=A(b)(b+1)^2<0$

$f(x)$ の最小値を m とすると

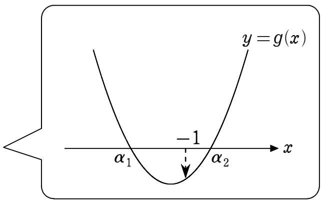
$m \leqq f(b)<0$ となり，題意を満たす。

以上から，求める a の範囲は $a<\dfrac{9}{4}$ …答

(2) $f'(x)=(2x+3)(x+1)^2+(x^2+3x+a)\cdot 2(x+1)$
$\quad =(x+1)(4x^2+11x+2a+3)$

$g(x)=4x^2+11x+2a+3\left(=4\left(x+\dfrac{11}{8}\right)^2+\dfrac{32a-73}{16}\right)$ とおく。

$a<2$ のとき $g(-1)=4-11+2a+3$
$\qquad =2a-4$
$\qquad <0$

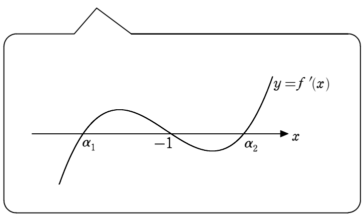


これより，
$x<-1$，$-1<x$ の範囲に
1 つずつ $g(x)=0$ の解が存在し
それらを α_1，$\alpha_2\,(\alpha_1<\alpha_2)$ とする。

よって，$f'(x)$ の増減表として

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	-1	$\cdots$	α_2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	0	↘	極小	↗

を得る。



さて，$A(\alpha_2)-A(\alpha_1)=(\alpha_2{}^2+3\alpha_2+a)-(\alpha_1{}^2+3\alpha_1+a)$
$\qquad =(\alpha_2+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)+3(\alpha_2-\alpha_1)$
$\qquad =(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+3)$

今，$\begin{cases} \alpha_2-\alpha_1>0 & (\because\ \alpha_1<\alpha_2\ \text{という設定}) \\ \alpha_1+\alpha_2=-\dfrac{11}{4} & (\because\ \alpha_1,\ \alpha_2\ \text{は 2 次方程式}\ g(x)=0\ \text{の解}) \end{cases}$ …(☆)

ゆえに，$A(\alpha_2)-A(\alpha_1)=(\alpha_2-\alpha_1)\cdot\dfrac{1}{4}>0$

これより，$A(\alpha_1)<A(\alpha_2)$ …①

一方，$B(\alpha_2)-B(\alpha_1)=(\alpha_2+1)^2-(\alpha_1+1)^2$
$\qquad =(\alpha_2{}^2+2\alpha_2+1)-(\alpha_1{}^2+2\alpha_1+1)$
$\qquad =(\alpha_2+\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_1)+2(\alpha_2-\alpha_1)$
$\qquad =(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+2)$
$\qquad =(\alpha_2-\alpha_1)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)<0$ ($\because$ (☆))

ゆえに，$0<B(\alpha_2)<B(\alpha_1)$ …②

また，$f(x)$ の増減表から，これら 2 つの極小値は負となるため

$$\begin{cases} f(\alpha_1)=A(\alpha_1)B(\alpha_1)<0 \\ f(\alpha_2)=A(\alpha_2)B(\alpha_2)<0 \end{cases}$$

よって，② より，$A(\alpha_1)<0$，$A(\alpha_2)<0$

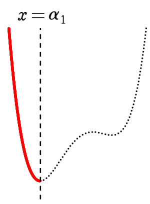
① と併せて考えると，$A(\alpha_1)<A(\alpha_2)<0$ …③

②，③ より，$A(\alpha_1)<A(\alpha_2)<0<B(\alpha_2)<B(\alpha_1)$

ゆえに，$A(\alpha_1)B(\alpha_1)<A(\alpha_2)B(\alpha_2)$

すなわち，$f(\alpha_1)<f(\alpha_2)$ であることが示された。

(3) [1] $a<2$ のとき，$\beta=\alpha_1$ とすれば
(2) の $f(x)$ に関する増減表から
$x<\beta$ で単調減少かつ $x=\beta$ で最小値

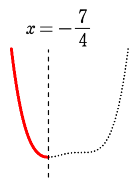


[2] $a=2$ のとき

$f'(x)=(x+1)(4x^2+11x+7)$
$\quad =(x+1)^2(4x+7)$

ゆえに，$f'(x)$ の符号は $4x+7$ の符号に依存し

x	$\cdots$	$-\frac{7}{4}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗



ゆえに，$\beta=-\dfrac{7}{4}$ とすれば
$x<\beta$ で単調減少かつ $x=\beta$ で最小値

[3]　$\alpha>2$ のとき

このとき，$g(-1)=2a-4>0$

以下，$g(x)=4\left(x+\dfrac{11}{8}\right)^2+\dfrac{32a-73}{16}$ であることに注意する。

[3−1]　$a \geqq \dfrac{73}{32}$ のとき

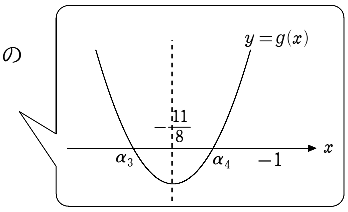
$g(x) \geqq 0$ だから，$f'(x)\,(=(x+1)g(x))$ の符号は $x+1$ の符号に依存し

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

ゆえに，$\beta=-1$ とすれば
$x<\beta$ で単調減少かつ $x=\beta$ で最小値

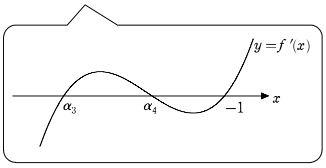
[3−2]　$2<a<\dfrac{73}{32}$ のとき

$g(x)=0$ は相異なる 2 つの実数解 α_3，α_4 $(\alpha_3<\alpha_4)$
をもち $\alpha_3<\alpha_4<-1$

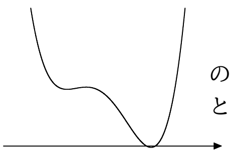


よって，$f'(x)$ の増減表として

x	$\cdots$	α_3	$\cdots$	α_4	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘	0	↗



$A(\alpha_3)>0$ とすると，
極小値 $f(\alpha_3)=A(\alpha_3)B(\alpha_3)>0$



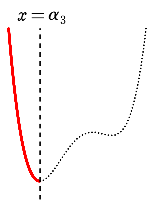
のような概形となり，題意のように β がとれない。

よって，$A(\alpha_3)$ が 0 以下の値として存在すればよく

$$\alpha_3{}^2+3\alpha_3+a \leqq 0$$

$$\left(\alpha_3+\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4} \leqq 0$$

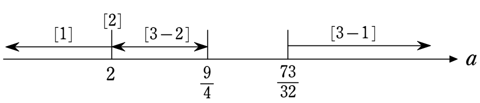
$$a \leqq \frac{9}{4}$$



このとき，$\beta=\alpha_3$ とすれば
$x<\beta$ で単調減少かつ $x=\beta$ で最小値

よって，$2<a \leqq \dfrac{9}{4}$ であればよい。

以上 [1], [2], [3−1], [3−2] から題意を満たす β が存在するような a の範囲は



$$a \leqq \frac{9}{4},\ \ \frac{73}{32} \leqq a \quad \cdots 答$$

【総括】

(1) から微分して収拾がつかなくなる可能性が大いにあります。

(2) も単純に直接差を取るのが大変で，掛け算のパーツそれぞれの大小を見るという工夫も中々厳しいでしょう。

(1)，(2) ともに $f(x)$ が積の形であるということを活かしきれたかどうかがポイントになりました。

しかし，試験場では相当厳しいでしょう。

(3) も随所随所で頭を整理しないと，自分がどこに向かえばいいのかということを見失ってしまいます。

全体的には

$f'(x)$ の符号をいかに把握するか

という部分が大切な問題だと思います。

$f'(x)=0$ という解ばかりに気をとられ，その前後の「符号」を疎かにしている人が多いので，そこに対する教訓となり得る問題です。

完答するには相当なスタミナが必要で，試験場では撤退もやむなしでしょう。