K を 3 より大きな奇数とし，$\ell+m+n=K$ を満たす正の奇数の組 (ℓ, m, n) の個数 N を考える。ただし，たとえば，$K=5$ のとき，$(\ell, m, n)=(1, 1, 3)$ と $(\ell, m, n)=(1, 3, 1)$ とは異なる組とみなす。

(1) $K=99$ のとき，N を求めよ。

(2) $K=99$ のとき，ℓ，m，n の中に同じ奇数を 2 つ以上含む組 (ℓ, m, n) の個数を求めよ。

(3) $N>K$ を満たす最小の K を求めよ。

＜ '22 東北大 ＞

【戦略】

自然数や非負整数の和に分割する方法はよくある定番の話題ですが，奇数の和として分割するという部分が一見目新しく感じるかもしれません。

ただ， $\begin{cases} \ell=2L+1 \\ m=2M+1 \\ n=2N+1 \end{cases}$ $(L, M, N$ は非負整数$)$ **と置いてしまえば**

$$(2L+1)+(2M+1)+(2N+1)=K$$

となり，結局は $L+M+N=\dfrac{K-3}{2}\ \cdots(*)$ **を満たす非負整数** (L, M, N) **の組を求めるという定番の話題に帰着します。**

(K **が 3 より大きい奇数という条件はこの段階で「だからか」と納得できるでしょう。)**

(1) $K=99$ **のときなので，** $L+M+N=48$ **を満たす非負整数** (L, M, N) **の組が何組あるのか求めるだけです。**

これは定番の ○と仕切りの並べ方を数えればよいという考え方をします。

10 個　　30 個　　8 個

○○○……○｜○○○……○｜○○○……○

$\to (L, M, N)=(10, 30, 8)$

14 個　　0 個　　34 個

○○○……○｜｜○○○……○

$\to (L, M, N)=(14, 0, 34)$

0 個　　23 個　　25 個

｜○○○……○｜○○○……○

$\to (L, M, N)=(0, 23, 25)$

のように対応させるわけです。

これにより，○ 48 個と 2 本の仕切りを置く場所を合計 50 個用意し 2 本の仕切りをおく 2 ヵ所を選ぶ ${}_{50}\mathrm{C}_2$ **通りが求めるものです。**

(2) $(k, k, 48-k)$ $(k \fallingdotseq 48-k)$ **というタイプ(及びその並べ替え)**

(k, k, k) **というタイプに分けて考えればよいでしょう。**

(3) N **は (1) の考え方をそのまま使えば，** $N={}_{\frac{K-3}{2}+2}\mathrm{C}_2$ **となり，具体的に** K **の式で表せ，** $N>K$ **という条件は** K **の 2 次不等式に帰着します。**

ガチで解くというよりも見つける感覚に近い捌き方でよいでしょう。

【解答】

正の奇数 ℓ，m，n は

$$\begin{cases} \ell=2L+1 \\ m=2M+1 \\ n=2N+1 \end{cases} \quad (L, M, N \text{ は非負整数})$$

と表せる。

このとき，$\ell+m+n=K$ という条件は

$$(2L+1)+(2M+1)+(2N+1)=K$$

すなわち，$L+M+N=\dfrac{K-3}{2}\ \cdots(*)$ と表せる。

$(*)$ を満たす非負整数の組 (L, M, N) と題意を満たす正の奇数の組 (ℓ, m, n) は 1 対 1 に対応する。

(1) $K=99$ のとき，$L+M+N=48$ であり，これを満たす非負整数の組 (L, M, N) の個数を求めればよい。

これは 48 個の○と 2 本の仕切りを並べる総数に等しい。

なぜなら，2 本の仕切りによって分けられる 3 つの領域のうち各領域にある○の個数を左から L，M，N に対応させることで $L+M+N=48$ となる非負整数の組 (L, M, N) が 1 対 1 に対応するからである。

ゆえに，$N={}_{48+2}\mathrm{C}_2=\dfrac{50\cdot 49}{2}=1225$ … 答

(2) (1) に引き続き，$L+M+N=48$ のときを考える。

$(L, M, N)=(k, k, 48-k)$ $(k \fallingdotseq 48-k)$ のとき

k の取り方は

$$k=0, 1, 2, \cdots, 24$$

の 25 通りのうち，$k=16$ は除く 24 通り。

$(k, k, 48-k)$ の並べ替え方は $\dfrac{3!}{2!}=3$【通り】

ゆえに，3 数 L，M，N のうち 2 つだけが等しいものは

$$24\times 3=72\text{【通り】}$$

$(L, M, N)=(k, k, k)$ のとき，k の取り方は $k=16$ の 1 通り。

以上から，題意を満たす組の個数は $72+1=73$【通り】… 答

(3)　(*) を満たす非負整数の組 (L, M, N) の総数は (1) と同様に

$\dfrac{K-3}{2}$ 個の○と 2 本の仕切りの並べ方の総数に等しく

$$N = {}_{\frac{K-3}{2}+2}\mathrm{C}_2$$
$$= {}_{\frac{K+1}{2}}\mathrm{C}_2$$
$$= \frac{\frac{K+1}{2}\cdot\frac{K-1}{2}}{2}$$
$$= \frac{K^2-1}{8}$$

$N > K$ のとき，

$$\frac{K^2-1}{8} > K$$

$$K^2 - 8K - 1 > 0$$

$$(K-4)^2 > 17$$

これを満たす最小の奇数 K は $K=9$ … 答

【総括】

一見「奇数？」となりますが，結局は

○と仕切りによる並びと対応させる

という定番の話題に帰着します。

(2) もモデルケースを考えてみて

「あ～，こういうタイプを数えればいいのね」

という要領さえ掴めるかどうかの問題です。