座標空間内において，ベクトル

$$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1),\ \vec{b}=(1,\ 1,\ -1),\ \vec{c}=(0,\ 0,\ 1)$$

が定める 2 直線

$$\ell : s\vec{a},\quad \ell' : t\vec{b}+\vec{c}\quad (s,\ t\ \text{は実数})$$

を考える。

点 A_1 を原点 $(0,\ 0,\ 0)$ とし，点 A_1 から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_1B_1 とおく。次に $B_1\left(t_1\vec{b}+\vec{c}\right)$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_1A_2 とおく。同様に，点 $A_k\left(s_k\vec{a}\right)$ から直線 ℓ' に下ろした垂線を A_kB_k，点 $B_k\left(t_k\vec{b}+\vec{c}\right)$ から直線 ℓ に下ろした垂線を B_kA_{k+1} とする手順を繰り返して，点 $A_n\left(s_n\vec{a}\right)$，$B_n\left(t_n\vec{b}+\vec{c}\right)$ (n は正の整数) を定める。

(1) s_n を用いて s_{n+1} を表せ。

(2) 極限値 $S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n$，$T=\lim\limits_{n\to\infty}t_n$ を求めよ。

(3) (2) で求めた S, T に対して，点 A，B をそれぞれ

$$A\left(S\vec{a}\right),\ B\left(T\vec{b}+\vec{c}\right)$$

とおくと，直線 AB は 2 直線 ℓ, ℓ' の両方と直交することを示せ。

< '22 東北大 >

【戦略】

(1) **ℓ, ℓ' はそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$ を方向ベクトルにもつ直線ですから，**

$$\overrightarrow{A_nB_n}\perp\vec{b},\quad \overrightarrow{B_nA_{n+1}}\perp\vec{a}$$

を立式していきます。

原点 O を位置ベクトルの基準として

$$\overrightarrow{OA_n}=s_n\vec{a},\quad \overrightarrow{OB_n}=t_n\vec{b}+\vec{c}$$

ということですから，これを用いて $\overrightarrow{A_nB_n}$, $\overrightarrow{B_nA_{n+1}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表しにいけばよいでしょう。

その際，主役の 3 本 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の大きさ，内積という基本情報を先に準備しておきましょう。

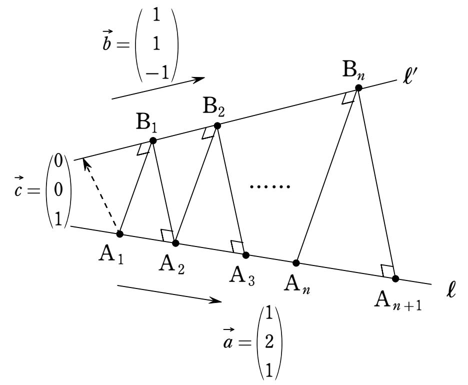
(2) **(1) で漸化式が得られているので，それを処理するのみです。**

(3) **$\overrightarrow{OA}=S\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=T\vec{b}+\vec{c}$ で，(2) から S, T が得られていますから $\overrightarrow{AB}$ が具体的に立式できます。**

もちろん，示すべきは $\overrightarrow{AB}\perp\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}\perp\vec{b}$，すなわち $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\vec{a}=0\\ \overrightarrow{AB}\cdot\vec{b}=0\end{cases}$

ということです。

【解答】



直線 ℓ は $\vec{a}$ を方向ベクトルにもつ直線

直線 ℓ' は $(0,\ 0,\ 1)$ を通り，$\vec{b}$ を方向ベクトルにもつ直線

$$\begin{cases}\left|\vec{a}\right|^2=1^2+2^2+1^2=6\\ \left|\vec{b}\right|^2=1^2+1^2+(-1)^2=3\\ \left|\vec{c}\right|^2=0^2+0^2+1^2=1\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+2\cdot1+1\cdot(-1)=2\\ \vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot0+1\cdot0+(-1)\cdot1=-1\\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0\cdot1+0\cdot2+1\cdot1=1\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots(*)$$

(1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_nB_n}&=\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OA_n}\\ &=\left(t_n\vec{b}+\vec{c}\right)-\left(s_n\vec{a}\right)\\ &=-s_n\vec{a}+t_n\vec{b}+\vec{c}\end{aligned}\qquad \begin{aligned}\overrightarrow{B_nA_{n+1}}&=\overrightarrow{OA_{n+1}}-\overrightarrow{OB_n}\\ &=\left(s_{n+1}\vec{a}\right)-\left(t_n\vec{b}+\vec{c}\right)\\ &=s_{n+1}\vec{a}-t_n\vec{b}-\vec{c}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{A_nB_n}\cdot\vec{b}=0$ より，$-s_n\vec{a}\cdot\vec{b}+t_n\left|\vec{b_n}\right|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0$

$(*)$ より，$-2s_n+3t_n-1=0$ ⋯①

$\overrightarrow{B_nA_{n+1}}\cdot\vec{a}=0$ より，$s_{n+1}\left|\vec{a}\right|^2-t_n\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{a}=0$

$(*)$ より，$6s_{n+1}-2t_n-1=0$ ⋯②

① より，$t_n=\dfrac{2s_n+1}{3}$ ⋯③

② に代入し，$6s_{n+1}-2\cdot\dfrac{2s_n+1}{3}-1=0$

これを整理すると，$s_{n+1}=\dfrac{2}{9}s_n+\dfrac{5}{18}$ ⋯答

(2) (1) より，$s_{n+1}-\dfrac{5}{14}=\dfrac{2}{9}\left(s_n-\dfrac{5}{14}\right)$

よって，
$$\begin{aligned}s_n-\frac{5}{14}&=\left(s_1-\frac{5}{14}\right)\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\\ &=-\frac{5}{14}\left(\frac{2}{9}\right)^{n-1}\quad(\because A_1\text{は原点で，}s_1=0)\end{aligned}$$

これより，$s_n=\dfrac{5}{14}-\dfrac{5}{14}\left(\dfrac{2}{9}\right)^{n-1}$

ゆえに，$S=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{5}{14}$ ⋯答

また，③ より

$$T=\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2s_n+1}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{14}+\frac{1}{3}=\frac{4}{7}\cdots \text{答}$$

(3)　(2) より $\mathrm{A}\left(\frac{5}{14}\vec{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)$ であり，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=\left(\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\right)-\frac{5}{14}\vec{a}\\&=-\frac{5}{14}\vec{a}+\frac{4}{7}\vec{b}+\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{a}&=-\frac{5}{14}|\vec{a}|^2+\frac{4}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=-\frac{5}{14}\cdot6+\frac{4}{7}\cdot2+1\ (\because\ (*))\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{b}&=-\frac{5}{14}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{7}|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=-\frac{5}{14}\cdot2+\frac{4}{7}\cdot3+(-1)\ (\because\ (*))\\&=0\end{aligned}$$

ℓ，ℓ' はそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を方向ベクトルにもつため，直線 AB は ℓ，ℓ' の両方に直交する。

【総括】

この点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ の定め方の規則やイメージがつかめ，位置ベクトルの記号の意味を受け損なわなければ，標準的な内容です。

律儀にお絵かきしようとエネルギーを使う受験生もいたかもしれませんが，立式するための見やすい図がかければ問題ありません。