　xy 平面の第1象限内において，直線 $\ell : y=mx$ $(m>0)$ と x 軸の両方に接している半径 a の円を C とし，円 C の中心を通る直線 $y=tx$ $(t>0)$ を考える。また，直線 ℓ と x 軸，および，円 C のすべてにそれぞれ1点で接する円の半径を b とする。ただし，$b>a$ とする。

(1)　m を用いて t を表せ。

(2)　t を用いて $\dfrac{b}{a}$ を表せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to+0}\frac{1}{m}\left(\frac{b}{a}-1\right)$ を求めよ。

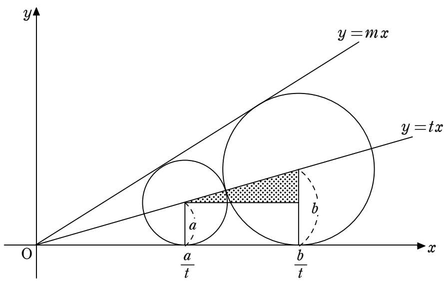
＜ '22 東北大 ＞

【戦略】

(1)　**$y=tx$ は，ℓ と x 軸のなす角の二等分線です。**

m，t の関係は，傾きの関係で，さらに二等分線という角度の関係を翻訳しようと思うと，$\tan$ を持ち出したくなります。

(2)



という状況です。

図の打点部分の直角三角形に注目すると

$$\left(\frac{b}{t}-\frac{a}{t}\right)^2+(b-a)^2=(b+a)^2$$

となります。

これを整理すれば，$\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)(b-a)^2=(b+a)^2$ となります。

最終的に $\dfrac{b}{a}$ を求めること，及びこの関係式が同次式であることを考えると，両辺 a^2 で割るのが自然です。

これにより，$\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)\left(\dfrac{b}{a}-1\right)^2=\left(\dfrac{b}{a}+1\right)^2$ となります。

目に優しく，$c=\dfrac{b}{a}$ (>1) とおくと，$\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)(c-1)^2=(c+1)^2$

で，整理すれば $c^2-2(2t^2+1)c+1=0$ という2次方程式を得ます。

$c=(2t^2+1)\pm\sqrt{(2t^2+1)^2-1}$ という解を得ますが，どちらにしても $c>0$ ですから，$c>0$ というのは $\pm$ を決定づける決め手になりません。

この2次方程式の解 α，β に対して $\alpha\beta=1$ ですから，大きいほうの解が1より大きく，小さいほうの解は1より小さいことになります。

今回 c は $c>1$ を満たしていなければならないため，大きいほうの解ということになり，

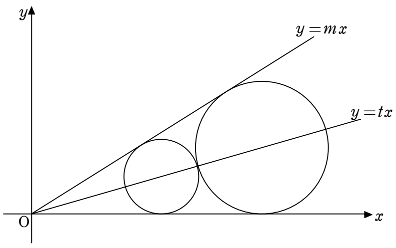
$$\begin{aligned}c&=(2t^2+1)+\sqrt{(2t^2+1)^2-1}\\&=(2t^2+1)+2t\sqrt{t^2+1}\end{aligned}$$

と解決します。

(3)　**(1) の途中経過から，m は t で表され，(2) から $\dfrac{b}{a}$ も t で表せています。**

与えられた極限値は t に関する極限値として読み替えて処理すればよいでしょう。

【解答】



(1)　$m=\tan\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$t=\tan\dfrac{\theta}{2}$

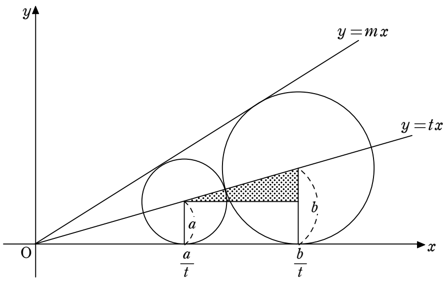
$\tan\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}$ より，$m=\dfrac{2t}{1-t^2}$ …①

分母を払って整理すると，$mt^2+2t-m=0$

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{1+m^2}}{m}$$

$t>0$ より，$t=\dfrac{\sqrt{m^2+1}-1}{m}$ …答

(2)



図の打点部の直角三角形に注目すると

$$\left(\frac{b}{t}-\frac{a}{t}\right)^2+(b-a)^2=(b+a)^2$$

$$\left\{\frac{1}{t}(b-a)\right\}^2+(b-a)^2=(b+a)^2$$

$$\left(\frac{1}{t^2}+1\right)(b-a)^2=(b+a)^2$$

両辺 a^2 (>0) で割ると，$\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)\left(\dfrac{b}{a}-1\right)^2=\left(\dfrac{b}{a}+1\right)^2$

$\dfrac{b}{a}=c$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{t^2}+1\right)(c-1)^2=(c+1)^2$

分母を払って整理すると，$c^2-2(2t^2+1)c+1=0$ …(＊)

この2次方程式の2解 α, β に対して，$\alpha\beta=1$であるため
(*) を満たす解は一方が1より大きく，他方は1より小さい。

$c\left(=\dfrac{b}{a}\right)>1$ であるため，$c=(2t^2+1)+\sqrt{(2t^2+1)^2-1}$

ゆえに，

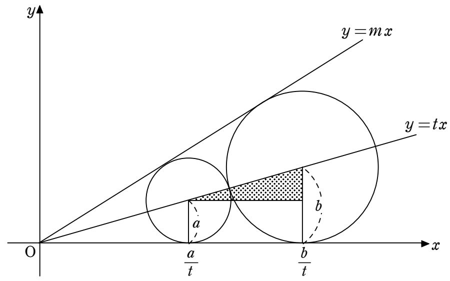
$$\begin{aligned}\frac{b}{a}&=(2t^2+1)+\sqrt{(2t^2+1)^2-1}\\&=(2t^2+1)+2t\sqrt{t^2+1}\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

(3)　$m\to+0$ のとき，$t\to+0$

① より，$\dfrac{1}{m}=\dfrac{1-t^2}{2t}$ であり，(2) の結果もあわせると

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=\lim_{t\to+0}\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)(2t^2+2t\sqrt{t^2+1})\\&=\lim_{t\to+0}(1-t^2)(t+\sqrt{t^2+1})\\&=1\cdot(0+\sqrt{1})\\&=1\quad\cdots\text{答}\end{aligned}$$

【戦略 2】(2) 部分的処理



【戦略 1】では

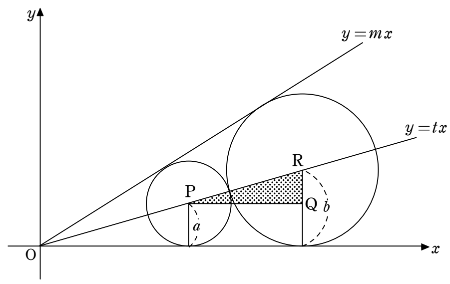
傾きが t であることに注目し，$\dfrac{a}{t}$，$\dfrac{b}{t}$ を導出 → 三平方の定理

という流れで処理しましたが，

三平方の定理 → 傾きが t であることに注目

という逆の流れで考えることもできます。

【解 2】(2) 部分的処理



図のように P，Q，R を定めると，三平方の定理から

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{(b+a)^2-(b-a)^2}=2\sqrt{ab}$$

$t=\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PQ}}$ より，$t=\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{\dfrac{b}{a}-1}{2\sqrt{\dfrac{b}{a}}}=\dfrac{c-1}{2\sqrt{c}}$ $\left(c=\dfrac{b}{a}\text{ とおいた}\right)$

$t^2=\dfrac{(c-1)^2}{4c}$ で，分母を払って整理すると，

$$c^2-2(2t^2+1)c+1=0$$

（以下【解 1】に準じる）

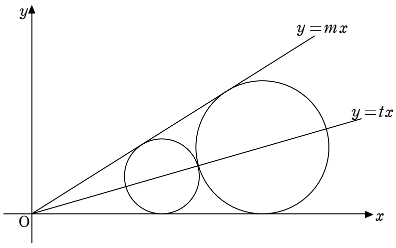
※　$t=\dfrac{b-a}{2\sqrt{ab}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{c}-\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)$ とすると，

$c-2t\sqrt{c}-1=0$ という関係を得る。

$\sqrt{c}=t\pm\sqrt{t^2+1}$ だが，$\sqrt{c}>0$ であるため，$\sqrt{c}=t+\sqrt{t^2+1}$

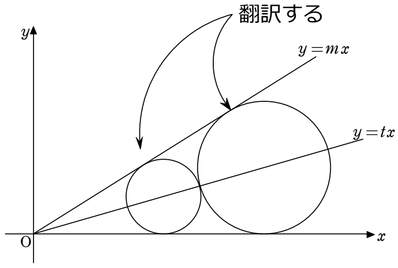
$c=(t+\sqrt{t^2+1})^2$ であり，$c=2t^2+1+2t\sqrt{t^2+1}$ と処理してもよい。

【総括】



という状態の翻訳するのに

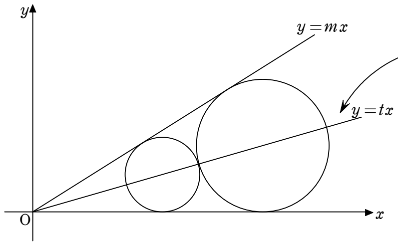
ここで接するということを
翻訳する



という方針でいこうと思うと，中心の座標を設定する必要があります。

一方【解答】では

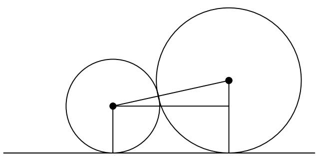
これが二等分線



と翻訳しました。(この場合も θ という文字の設定が必要)

このように本問は随所で複数方針が考えられ，目移りしてしまいそうです。

また，形的にきれいな形ではないため，試験場では不安になるかもしれません。



という構図は定番の構図で
中心間距離と水平距離に注目し
三平方の定理を使うのが定番です。

また，(2) の導出過程で現れる「同次式」の扱いについては経験値が必要な部分がありますが，東北大受験生であればクリアーすべき基本事項です。
今回はもろに $\dfrac{b}{a}$ が訊かれていることも考えると，なおさらクリアーしたいところです。