

正の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して、次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x} \leq \sqrt{1+x} - 1 \leq \frac{x}{2}$$

(2) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

<'22 東北大>