正の整数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$$

とする。

(1) 正の実数 x に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\frac{x}{2}$$

(2) 極限値 $\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。

＜'22 東北大＞

【戦略 1】

(1) **素直に差をとって微分します。**

右側の不等式の証明については $f_1(x)=\dfrac{x}{2}-(\sqrt{1+x}-1)$ **と設定すれば，** $f_1{}'(x)=\cdots=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}>0$ **と，特に引っかかる部分もなく手なりに** $f_1{}'(x)$ **が単調増加であることが言えるため，**
$f_1(x)>f_1(0)=0$ **であることが言え，解決です。**
（**問題文には等号が入っていますが，特に問題はないでしょう。**）

左側の不等式もひとまず差をとって

$$f_2(x)=(\sqrt{1+x}-1)-\frac{x}{2+x}$$

と設定します。

そのまま微分をすると，

$$f_2{}'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1\cdot(2+x)-x\cdot 1}{(2+x)^2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2}{(2+x)^2}$$

となり，このまま進めるのも面倒なことになりそうな予感がします。
（**この路線で押し通すのは【解 3】で紹介します。**）

そこで， $f_2(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}-\dfrac{x}{2+x}$ **と，分子の有理化をしてみると**

$f_2(x)=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\dfrac{1}{2+x}\right)$ **と，** x **で括れ，実質は**

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{2+x}>0$$

を目指せばよくなります。

これについても，安易に微分に飛びつかず，分母同士の比較で

$$\sqrt{1+x}+1<2+x$$

を目指せばよいでしょう。

そこで， $(2+x)-(\sqrt{1+x}+1)$ **という差を考えてみると**

$$(2+x)-(\sqrt{1+x}+1)=(1+x)-\sqrt{1+x}$$
$$=\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}-1)>0$$

となり，解決です。

(2) **(1) の真ん中の項を** S_n **の形に見立てて** $x=\dfrac{k}{n^2}$ **としたくなるはずです。**

すると， $\dfrac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\leqq\dfrac{k}{2n^2}$ **となります。**

このまま辺々に $\sum_{k=1}^{n}$ **をくっつけると**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2n^2}$$

です。

最右辺については $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n}=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\,dx=\dfrac{1}{4}$
と解決ですが，最左辺が問題です。

最左辺をいじくってみても，区分求積法が使える形にもちこめません。

そこで，等号をあきらめて，最左辺をさらに小さくすることを考えます。

$k=1，2，\cdots，n$ **ですから，** $k\leqq n$ **なので**

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}\leqq\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}$$

と評価してやると

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

となり，最左辺についても区分求積法で仕留める算段がつきます。

【解 1】

(1)　$f_1(x)=\dfrac{x}{2}-(\sqrt{1+x}-1)$ $(x>0)$ とする。

$$\begin{aligned} f_1{}'(x)&=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\\ &=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}}\\ &>0\ (\because\ x>0) \end{aligned}$$

ゆえに，$x>0$ で $f_1(x)$ は単調増加で

$$f_1(x)>f_1(0)=0$$

したがって，$\sqrt{1+x}-1\leqq\dfrac{x}{2}$ …①

一方，$f_2(x)=(\sqrt{1+x}-1)-\dfrac{x}{2+x}$　$(x>0)$ とする。

$$f_2(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{x}{2+x}=x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\frac{1}{2+x}\right)$$

ここで，
$$\begin{aligned}(2+x)-(\sqrt{1+x}+1)&=(1+x)-\sqrt{1+x}\\ &=\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}-1)>0\end{aligned}$$

したがって，$\sqrt{1+x}+1<2+x$ であり，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}-\dfrac{1}{2+x}>0$

よって，$x>0$ の範囲で $f_2(x)>0$ で，$\dfrac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1$ …②

①，② から，$\dfrac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1\leqq\dfrac{x}{2}$ が成立する。

(2)　(1) の不等式で $x=\dfrac{k}{n^2}\ (>0)$ とすると

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\leqq\frac{k}{2n^2}$$

ここで，$k=1, 2, \cdots, n$ であり，$k\leqq n$ であるから

$$\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}\leqq\frac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{k}{n^2}}$$

ゆえに，$\dfrac{\frac{k}{n^2}}{2+\frac{n}{n^2}}\leqq\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\leqq\dfrac{k}{2n^2}$

すなわち，$\dfrac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{k}{n}\leqq\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\leqq\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{k}{n}$

$k=1, 2, \cdots, n$　として辺々加えると

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}<S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\text{最右辺})=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\text{最左辺})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\frac{1}{2}\int_0^1 x dx=\frac{1}{4}$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$ …㊎

【戦略 2】(1) について

示すべき不等式の真ん中の項を最初から有理化してしまうと

$$\frac{x}{2+x}\leqq\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}\leqq\frac{x}{2}$$

で，$x>0$ の下では，

$$2\leqq\sqrt{1+x}+1\leqq 2+x$$

を示せばよいことになります。

そうなると，左側の不等式はほぼ自明ですし，右側の不等式については【解 1】に準じます。

【解 2】(1) について

示すべき不等式は $\dfrac{x}{2+x}\leqq\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}\leqq\dfrac{x}{2}$ であり，

$x>0$ の範囲において $2\leqq\sqrt{1+x}+1\leqq 2+x$ を示せばよい。

$x>0$ より，$(\sqrt{1+x}+1)-2=\sqrt{1+x}-1>\sqrt{1+0}-1=0$

また，
$$\begin{aligned}(2+x)-(\sqrt{1+x}+1)&=(1+x)-\sqrt{1+x}\\ &=\sqrt{1+x}\,(\sqrt{1+x}-1)>0\end{aligned}$$

以上から，$x>0$ において，$\dfrac{x}{2+x}\leqq\dfrac{x}{\sqrt{1+x}+1}\leqq\dfrac{x}{2}$ が成立する。

【戦略 3】(1) について

左側の不等式において $f_2(x)=(\sqrt{1+x}-1)-\dfrac{x}{2+x}$ と差をとって

微分すると

$$f_2'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1\cdot(2+x)-x\cdot 1}{(2+x)^2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2}{(2+x)^2}$$

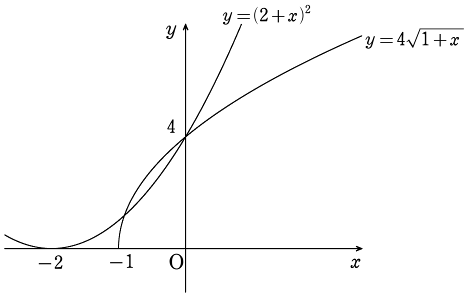
となり，【戦略 1】ではここから引き返しましたが，これを腕力で押し通してみます。

【解 3】(1) の部分的処理

$f_2(x)=(\sqrt{1+x}-1)-\dfrac{x}{2+x}$ とすると，

$$f_2'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1\cdot(2+x)-x\cdot 1}{(2+x)^2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{2}{(2+x)^2}$$
$$=\frac{(2+x)^2-4\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\,(2+x)^2}$$

ここで，$y=(2+x)^2$ のグラフと，$y=4\sqrt{1+x}$ のグラフは



であり，$x>0$ の範囲において，$(2+x)^2>4\sqrt{1+x}$

ゆえに，$x>0$ の範囲において，$f_2'(x)>0$ となり，$f_2(x)$ は単調増加。

$x>0$ では，$f_2(x)>f_2(0)=0$ となり，$\dfrac{x}{2+x}\leqq\sqrt{1+x}-1$ が成立する。

【戦略 4】(2) について

区分求積に頼らずとも，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ 部分の処理はできるでしょう。

【解 4】(2) の部分的処理

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}<S_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}$$

を得る部分までは【解 1】と同じ

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

$$\lim_{n\to\infty}(\text{最左辺})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2+0}\cdot\frac{1}{2}(1+0)$$
$$=\frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\text{最右辺})=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{4}(1+0)$$
$$=\frac{1}{4}$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}$ …答

【総括】

(1) は微分で処理する典型問題に見えるため，計算が膨らみ暗雲が立ち込めていくにつれ，試験場では平常心が奪われるでしょう。

安易に微分に飛びつかず，示すべき不等式を整理していき，急所を浮き彫りにさせることが教訓となります。

現実的には【解 1】【解 2】のように，最短距離をいける受験生はそれほど多くないと思いますし，微分で押し切る【解 3】は，グラフの上下で符号を読み取るということにどれだけ慣れているかが問題です。

(2) は (1) からの「はさみうちの原理」および「区分求積法」が目につく形で，方向性は外さないと思いますが，最左辺の評価が手慣れていないと厳しいでしょう。

等式をあきらめて不等式をつなぐ (評価する) という態度は差がつくと思います。

完答するためには「確かな力」が要求される問題です。