数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ を次の式

$$x_1=0,\ x_{n+1}=x_n+n+2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$y_{3m+1}=3m,\ y_{3m+2}=3m+2,\ y_{3m+3}=3m+4\ \ (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定める。

このとき，数列 $\{x_n-y_n\}$ の一般項を求めよ。

＜ '22 京都大 ＞

【戦略】

得体のしれない漸化式に対して，ひとまず実験してみます。

$$x_1=0$$
$$x_2=x_1+1+2\cos\frac{2\pi x_1}{3}=0+1+2\cos 0=3$$
$$x_3=x_2+2+2\cos\frac{2\pi x_2}{3}=3+2+2\cos 2\pi=7$$
$$x_4=x_3+3+2\cos\frac{2\pi x_3}{3}=7+3+2\cos\left(4\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=9$$
$$x_5=x_4+4+2\cos\frac{2\pi x_4}{3}=9+4+2\cos 6\pi=15$$
$$x_6=x_5+5+2\cos\frac{2\pi x_5}{3}=15+5+2\cos 10\pi=22$$

ひとまず $2\cos\frac{2\pi x_n}{3}$ **という項が周期性をもっていることに目を付けたいところです。**

$$2\cos\frac{2\pi x_n}{3}=\begin{cases}2\cos\dfrac{2\pi\cdot 3M}{3}=2\\ 2\cos\dfrac{2\pi(3M+1)}{3}=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2M\pi\right)=-1\\ 2\cos\dfrac{2\pi(3M+2)}{3}=2\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+2M\pi\right)=-1\end{cases}$$

と，$\cos\frac{2\pi x_n}{3}$ **の値は** x_n **を 3 で割った余りによって，周期性をもちます。**

そこで，x_n **を 3 で割った余りを調べてみると，上記実験から**

$$x_n\equiv\begin{cases}0\ (n\text{ が 3 で割って 1 余るとき})\\0\ (n\text{ が 3 で割って 2 余るとき})\\1\ (n\text{ が 3 で割り切れるとき})\end{cases}$$

という予想が立ちますから，これをひとまず示します。
（証明は漸化式と相性のよい数学的帰納法で示すのが自然でしょう。）

これにより，$2\cos\frac{2\pi x_n}{3}=\begin{cases}2\quad(n\text{ が 3 で割って 1 余るとき})\\2\quad(n\text{ が 3 で割って 2 余るとき})\\-1\quad(n\text{ が 3 で割り切れるとき})\end{cases}$

が得られます。

一方，$y_{n+1}-y_n$ **も** $\begin{cases}2\quad(n\text{ が 3 で割って 1 余るとき})\\2\quad(n\text{ が 3 で割って 2 余るとき})\\-1\quad(n\text{ が 3 で割り切れるとき})\end{cases}$ **であることから**

$x_{n+1}-x_n-n=y_{n+1}-y_n$ **です。**

$z_n=x_n-y_n$ **とおけば，**

$$z_{n+1}-z_n=n$$

と，z_n **の階差数列が得られることから，**$z_n\ (=x_n-y_n)$ **の一般項も得られ解決です。**

【解答】

以下，合同式の法を 3 として，

$$x_n\equiv\begin{cases}0\ (n\text{ が 3 で割って 1 余るとき})\\0\ (n\text{ が 3 で割って 2 余るとき})\\1\ (n\text{ が 3 で割り切れるとき})\end{cases}$$

であることを示す。

すなわち，$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して

$$\begin{cases}x_{3m+1}\equiv 0\\x_{3m+2}\equiv 0\\x_{3m+3}\equiv 1\end{cases}\cdots(☆)$$

であることを m についての数学的帰納法で示す。

[1]　$m=0$ のとき

$$\begin{cases}x_1=0\equiv 0\\x_2=x_1+1+2\cos 0=3\equiv 0\\x_3=x_2+2+2\cos 2\pi=7\equiv 1\end{cases}$$

より，(☆) は正しい。

[2]　$m=k$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき (☆) が成り立つと仮定する。

すなわち，$\begin{cases}x_{3k+1}\equiv 0\\x_{3k+2}\equiv 0\\x_{3k+3}\equiv 1\end{cases}$ と仮定する。

このとき，$x_{3k+3}=3K+1$ (K は整数) と表せ

$$\begin{aligned}x_{3k+4}&=(3K+1)+(3k+3)+2\cos\left(\frac{2\pi(3K+1)}{3}\right)\\&=3K+3k+4+2\cos\frac{2\pi}{3}\\&=3(K+k+1)\\&\equiv 0\end{aligned}$$

ゆえに，$x_{3k+4}=3L$ (L は整数) と表せ

$$\begin{aligned}x_{3k+5}&=3L+(3k+4)+2\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3L}{3}\right)\\&=3L+3k+4+2\cos 2L\pi\\&=3(L+k+2)\\&\equiv 0\end{aligned}$$

ゆえに，$x_{3k+5}=3M$ (M は整数) と表せ

$$\begin{aligned}x_{3k+6}&=3M+(3k+5)+2\cos\left(\frac{2\pi\cdot 3M}{3}\right)\\&=3M+3k+5+2\cos 2M\pi\\&=3M+3k+7\\&\equiv 1\end{aligned}$$

以上から，$m=k+1$ のときも (☆) は正しい。

これより，$m=0,1,2,\cdots$ に対して

$$\begin{cases} x_{3m+1}\equiv 0 \\ x_{3m+2}\equiv 0 \\ x_{3m+3}\equiv 1 \end{cases}$$

が言え，α，β，γ を整数として $\begin{cases} x_{3m+1}=3\alpha \\ x_{3m+2}=3\beta \\ x_{3m+3}=3\gamma+1 \end{cases}$ と表せる。

したがって，

$$\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+1}}{3}\right)=\cos\frac{2\pi(3\alpha)}{3}=\cos 2\alpha\pi=1$$
$$\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+2}}{3}\right)=\cos\frac{2\pi(3\beta)}{3}=\cos 2\beta\pi=1$$
$$\cos\left(\frac{2\pi x_{3m+3}}{3}\right)=\cos\frac{2\pi(3\gamma+1)}{3}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}+2\gamma\pi\right)=-\frac{1}{2}$$

与えられた漸化式から

$$x_{n+1}-x_n-n=2\cos\left(\frac{2\pi x_n}{3}\right)=\begin{cases} 2 & (n\text{ が }3\text{ で割って }1\text{ 余るとき}) \\ 2 & (n\text{ が }3\text{ で割って }2\text{ 余るとき}) \\ -1 & (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき}) \end{cases}\cdots ①$$

一方，数列 $\{y_n\}$ についての与えられた条件から

$$\begin{cases} y_{3m+2}-y_{3m+1}=(3m+2)-3m=2 \\ y_{3m+3}-y_{3m+2}=(3m+4)-(3m+2)=2 \\ y_{3m+4}-y_{3m+3}=3(m+1)-(3m+4)=-1 \end{cases}$$

これは

$$y_{n+1}-y_n=\begin{cases} 2 & (n\text{ が }3\text{ で割って }1\text{ 余るとき}) \\ 2 & (n\text{ が }3\text{ で割って }2\text{ 余るとき}) \\ -1 & (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき}) \end{cases}\cdots ②$$

であることを意味する。

①，② より

$$x_{n+1}-x_n-n=y_{n+1}-y_n$$

整理すると，$(x_{n+1}-y_{n+1})-(x_n-y_n)=n$ であり，$x_n-y_n=z_n$ とおくと

$$z_{n+1}-z_n=n$$

$n\geqq 2$ のとき，

$$\begin{aligned} z_n&=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}k \\ &=\frac{n(n-1)}{2}\quad\cdots(*)\ (\because z_1=x_1-y_1=2-2=0) \end{aligned}$$

$(*)$ に $n=1$ を代入すると $z_1=0$ を得るため，$(*)$ は $n=1$ のときも正しい結果を与える。

したがって，求める数列 $\{x_n-y_n\}$ の一般項 x_n-y_n $(n=1,2,\cdots)$ は

$$x_n-y_n=\frac{n(n-1)}{2}\quad\cdots 答$$

【総括】

- $\cos\dfrac{2\pi x_n}{3}$ が周期性をもつこと

- そのために x_n を 3 で割った余りが必要になること

- $y_{n+1}-y_n$ についても同じ周期となっていること

など，急所に辿り着くのにエネルギーが必要です。

構想から組み立てるのは中々ハードで，機械的な処理になりがちな漸化式の問題が多い中，本問は目の前の式と向き合って特徴を観察し，必要な部分を見出しながら先に進んでいくという力が試されます。