

曲線 $C: y = \cos^3 x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, x 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。

$0 < t < \frac{\pi}{2}$ とし, C 上の点 $Q(t, \cos^3 t)$ と原点 O , および $P(t, 0)$, $R(0, \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 $OPQR$ の面積を $f(t)$ とする。

このとき, 次の各問に答えよ。

- (1) S を求めよ。
- (2) $f(t)$ は最大値をただ1つの t でとることを示せ。

そのときの t を α とすると, $f(\alpha) = \frac{\cos^4 \alpha}{3 \sin \alpha}$ であることを示せ。

- (3) $\frac{f(\alpha)}{S} < \frac{9}{16}$ を示せ。