曲線 $C: y=\cos^3 x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$x$ 軸および y 軸で囲まれる図形の面積を S とする。

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ とし，C 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ \cos^3 t)$ と原点 O，および $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{R}(0,\ \cos^3 t)$ を頂点にもつ長方形 OPQR の面積を $f(t)$ とする。

このとき，次の各問に答えよ。

(1) S を求めよ。

(2) $f(t)$ は最大値をただ 1 つの t でとることを示せ。

そのときの t を α とすると，$f(\alpha)=\dfrac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{f(\alpha)}{S}<\dfrac{9}{16}$ を示せ。

< ’22 京都大 >

【戦略】

(1) **実質的には** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, dx$ **という基本的な積分計算に過ぎません。**

$\sin$，$\cos$ **の奇数乗の積分では 1 乗を分離するのがセオリーです。**

(2) $f(t)$ **を具体的に立式すると** $f(t)=t\cos^3 t$ **です。**

もちろん微分して増減表まで持ち込むことを考えます。

$f'(t)=\cos^2 t\ (\cos t-3t\sin t)$ **となり，**$3t\sin t$ **を見て怯んでしまうかもしれませんが，**$y=\cos t$ **のグラフと** $y=3t\sin t$ **のグラフの上下を考えれば，**$\cos t-3t\sin t$ **の符号が把握できます**

$y=3t\sin t$ **は微分せずとも，**$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ **の範囲であれば単調増加です。**

後半については，α **の出どころである** $\cos\alpha=3\alpha\sin\alpha$ **という関係性から導きます。**

(3) (1)，(2) **から** $\dfrac{f(\alpha)}{S}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}$ **を得て，示すべき不等式は**

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\dfrac{9}{16}$，**すなわち** $\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\dfrac{9}{8}$ **ということになります。**

若干試行錯誤が必要ですが，左辺の次数に合わせて $\dfrac{9}{8}$ **を**

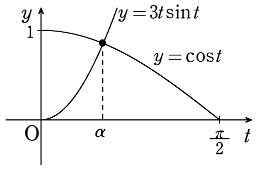
$$\frac{9}{8}=\frac{(\sqrt{3})^4}{2^3}$$

と見てやると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **という有名角を彷彿とさせる値が浮かびます。**

ここまでくれば，示すべき不等式が $\dfrac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\dfrac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$ **と見れるでしょう。**

$\dfrac{\cos^4 x}{\sin x}$ **という関数は** $0<x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ **において減少関数ですから** $\dfrac{\pi}{6}<\alpha$ **であることを示せばよいことになります。**

それについては，α **の出どころである**



というグラフをもとに，$\cos\dfrac{\pi}{6}>3\cdot\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{6}$ **が言えればよいのですがこの目標を整理すると** $2\sqrt{3}>\pi$ **となります。**

流石に，$\pi<3.2<2\cdot 1.7<2\sqrt{3}$ **という評価は証明なしで使わせてもらいたいです。**

もちろん，解答ではこれを逆算的に記述していきます。

【解答】

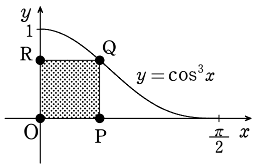
(1) $S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\cos x\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\cos x-(\sin x)^2\cos x\}\,dx$

$=\left[\sin x-\frac{1}{3}(\sin x)^3\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{2}{3}$ …答



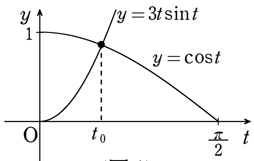
(2) $f(t)=t\cos^3 t$

$f'(t)=1\cdot\cos^3 t+t\cdot 3\cos^2 t\cdot(-\sin t)$
$\quad=\cos^2 t\,(\cos t-3t\sin t)$

$\cos^2 t\geqq 0$ であり，$f'(t)$ の符号は $\cos t-3t\sin t$ の符号に依存する。

そして，それは $y=\cos t$，$y=3t\sin t$ のグラフの上下によって判断できる。

$y=3t\sin t$ のグラフは $0<t<\frac{\pi}{2}$ において単調増加であることに注意すると以下の (図 1) のようになる。



(図 1)

したがって，$f(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	0	$\cdots$	t_0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

となり，$f(t)$ を最大にする $t\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$ の値はただ 1 つである。

その t の値を α とするので，$\alpha=t_0$ であり，t_0 は

$\cos t_0=3t_0\sin t_0$ を満たしているため，$\cos\alpha=3\alpha\sin\alpha$

これより，$\alpha=\frac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}$

よって，

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\alpha\cos^3\alpha\\&=\frac{\cos\alpha}{3\sin\alpha}\cdot\cos^3\alpha\\&=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\end{aligned}$$

となり，題意は示された。

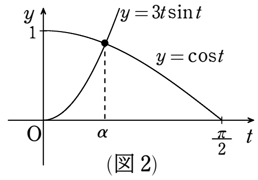
(3) $\frac{f(\alpha)}{S}=\frac{\cos^4\alpha}{3\sin\alpha}\cdot\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}$

今，$\pi<2\sqrt{3}$ であり，$\frac{\pi}{4}<\frac{\sqrt{3}}{2}$

これより，$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから，$3\cdot\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}<\cos\frac{\pi}{6}$

(図 2) より，$\frac{\pi}{6}<\alpha$ ということになる。



(図 2)

ここで，$y=\frac{\cos^4 x}{\sin x}$ は $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で単調減少

分子 は減少
分母 は増加

ゆえに，$\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{\frac{1}{2}}=\frac{9}{8}$

これより，$\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\frac{9}{16}$ を得る。

よって，$\frac{f(\alpha)}{S}<\frac{9}{16}$ である。

【総括】

(1)，(2) までは京大受験生であれば確保したいところです。

(3) については差がつくと思います。

示すべき不等式をほぐし，$\frac{\cos^4\alpha}{\sin\alpha}<\frac{9}{8}$ という部分まではいけると思いますが，この $\frac{9}{8}$ を $\frac{\cos^4\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$ と見れるかどうかが明暗を分けますし，決して簡単ではないでしょう。

また，ガッツリ微分に頼らずともラフに増減を判断する部分が多かったのも本問の特徴で，$y=3t\sin t$ や $\frac{\cos^4 x}{\sin x}$ という関数の増減をラフにとらえて判断しました。

キッチリやろうとしすぎて嵌まってしまった受験生も多いと思われます。