四面体 OABC が

$$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OB}=\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=3,\ \mathrm{OC}=\mathrm{AC}=2\sqrt{3}$$

を満たしているとする。P を辺 BC の点とし，△OAP の重心を G とする。次の各問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) P が辺 BC 上を動くとき，PG の最小値を求めよ。

＜ '22 京都大 ＞

**【戦略 1】ベクトル路線**

**空間ベクトルの基本，**

**1 つの始点，3 つの基底**

**という言葉に従い，3 本の主役ベクトル (基底)**

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$$

**を設定し，そのほかの登場人物を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表していきます。**

**主役の情報 ( 長さ，内積 ) については与えられた 6 辺の長さの情報から計算できます。**

**特に内積については余弦定理を経由せずとも，2 乗展開を用いて計算します。( というかベクトルの 2 乗展開は余弦定理そのもの )**

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+(1-s)\vec{c}\ \ (0\leqq s\leqq 1)$ **と表せますし，それに伴って**

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{3}$$

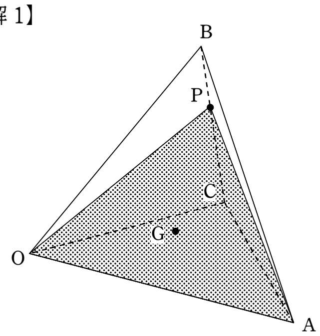
**という形で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ も Get できます。**

$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\vec{a}=0$ **を目指せばよく，上記の主役の情報を駆使して計算していきます。**

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2=|\bigcirc\vec{a}+\triangle\vec{b}+\square\vec{c}|^2$ **として 2 乗展開し，主役の基本情報をぶち込んでいけば $s$ についての 2 次関数となります。**

**したがって $0\leqq s\leqq 1$ の範囲における 2 次関数の最小値を求める基本問題に帰着します。**

【解 1】




$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$
とする。

$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$|\vec{c}|=2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=9$ より $|\vec{b}-\vec{a}|^2=9$ で，$|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=9\quad\therefore\ \vec{a}\cdot\vec{b}=8$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2=9$ より $|\vec{c}-\vec{b}|^2=9$ で，$|\vec{c}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{b}|^2=9\quad\therefore\ \vec{b}\cdot\vec{c}=6$

$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=12$ より $|\vec{a}-\vec{c}|^2=12$ で，$|\vec{a}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{c}|^2=12\quad\therefore\ \vec{c}\cdot\vec{a}=8$

(1) 辺 BC 上の点 P は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+(1-s)\vec{c}\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

と表せる。

点 G は △OAP の重心なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{3}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}+\frac{1-s}{3}\vec{c}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}&=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{s}{3}\vec{b}+\frac{1-s}{3}\vec{c}\right)-\left(s\vec{b}+(1-s)\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2s}{3}\vec{b}-\frac{2(1-s)}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PG}}\cdot\vec{a}&=\frac{1}{3}|\vec{a}|^2-\frac{2s}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{2(1-s)}{3}\vec{c}\cdot\vec{a}\\&=\frac{1}{3}\cdot16-\frac{2s}{3}\cdot8-\frac{2(1-s)}{3}\cdot8\\&=0\end{aligned}$$

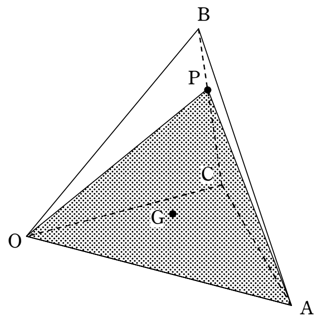
よって，$\overrightarrow{\mathrm{PG}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|^2&=\left|\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{2s}{3}\vec{b}-\frac{2(1-s)}{3}\vec{c}\right|^2\\&=\frac{1}{9}|\vec{a}-2s\vec{b}-2(1-s)\vec{c}|^2\\&=\frac{1}{9}\{|\vec{a}|^2+4s^2|\vec{b}|^2+4(1-s)^2|\vec{c}|^2-4s\vec{a}\cdot\vec{b}+8s(1-s)\vec{b}\cdot\vec{c}-4(1-s)\vec{c}\cdot\vec{a}\}\\&=\frac{1}{9}\{16+36s^2+48(1-s)-32s+48s(1-s)-32(1-s)\}\\&=\frac{1}{9}(36s^2-48s+32)\\&=\frac{4}{9}(9s^2-12s+8)\\&=4\left(s-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{16}{9}\end{aligned}$$

$0\leqq s\leqq 1$ の範囲では，$s=\dfrac{2}{3}$ で $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$ は最小となり，その最小値は

$$\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}\ \cdots 答$$

**【戦略 2】幾何的路線**




**元々，△COA は**

$$\mathrm{CO}=\mathrm{CA}$$

**の二等辺三角形です。**

**この四面体** OABC **は私が**

**「三脚錐」**

**と (勝手に) 呼んでいるもので**

$$\mathrm{BO}=\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$$

**を満たしています。( カメラの三脚 )**

**三脚錐について，この** B **から底面に下ろした垂線の足は，**

**底面 △COA の外心**

**になります。**

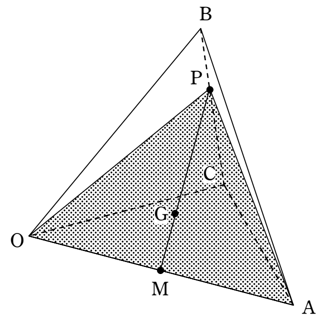
**二等辺三角形 △COA を三脚の足** BC **に沿って上げていった △POA も** PO＝PA **の二等辺三角形となります。**

**そう考えると，(1) は自明ですし，(2) は線分** OA **の中点を** M **とすると**

$$\begin{aligned}\mathrm{PG}&=\frac{2}{3}\mathrm{PM}\\&=\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{OP}^2-2^2}\end{aligned}$$

**なので，**OP **が最小となるときをとらえればよいことになります。**

【解 2】




(1)　△BCA，△BCO について

$$\begin{cases}\mathrm{BC}\text{ は共通辺}\\ \mathrm{CA}=\mathrm{CO}\\ \mathrm{BA}=\mathrm{BO}\end{cases}$$

より，△BCA≡△BCO …①

また，△ABP，△OBP について

$$\begin{cases}\mathrm{BP}\text{ は共通辺}\\ \mathrm{AB}=\mathrm{OB}\\ \angle\mathrm{ABP}=\angle\mathrm{OBP}\ (\because\ ①)\end{cases}$$

ゆえに，2 辺とその間の角が等しいため，△ABP ≡ △OBP

これより，△POA は PO＝PAの二等辺三角形 である。

線分 OA の中点を M とすると，

$$\begin{cases}\mathrm{P},\ \mathrm{G},\ \mathrm{M}\text{ は同一直線上}\\ \mathrm{PM}\perp\mathrm{OA}\end{cases}$$

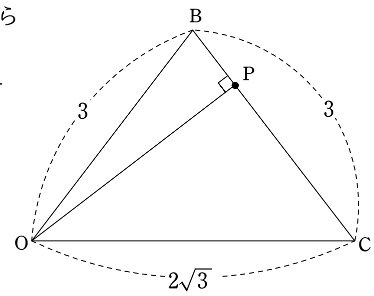
ゆえに，PG⊥OA が成立し，題意は示された。

(2)　$\mathrm{PG}=\frac{2}{3}\mathrm{PM}$

$=\frac{2}{3}\sqrt{\mathrm{OP}^2-2^2}$ であることから，OP の長さが最小となるとき

を考えればよい。

△OBC において余弦定理から




$$\begin{aligned}\cos B&=\frac{3^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\cdot3\cdot3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$\sin B>0$ なので

$$\begin{aligned}\sin B&=\sqrt{1-\cos^2 B}\\&=\sqrt{1-\frac{1}{9}}\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

OP が最小となるとき，OP⊥BC より，$\mathrm{OP}=3\sin B=2\sqrt{2}$

よって，PG の最小値は $\frac{2}{3}\sqrt{(2\sqrt{2})^2-4}=\frac{4}{3}$ …答

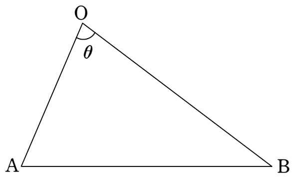
【総括】

幾何的路線については見えるか見えないかの問題になってきます。

試験場ではベクトルでゴリゴリ進めていくのが得策で，この場合，京大受験生であれば迷う余地はありませんし，迷う余地があってはならないでしょう。

【補足１】

△OAB で余弦定理を用いると




$$\mathrm{AB}^2=\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-2\,\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\cos\theta$$

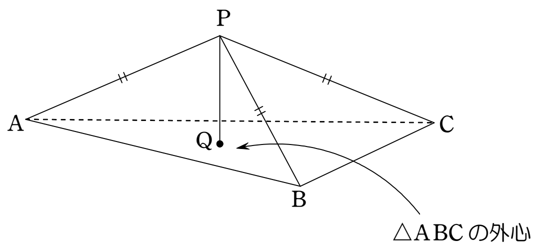
これをベクトルでいうと

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

ということになります。( これはあたかも 2 乗展開したように見えます )

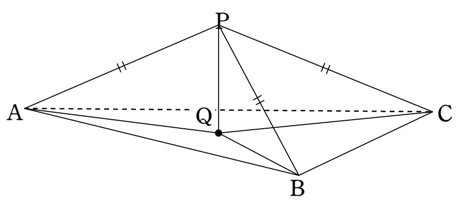
つまり，ベクトルにおいて 2 乗展開をした時点で
あなたは余弦定理を知らず知らずのうちに使っている
ということになります。

【補足２】




PA＝PB＝PC を満たす四面体 PABC に対し，点 P から底面 ABC に下ろした垂線の足 Q は △ABC の外心となる。

( 証明 )




直角三角形 PQA，PQB，PQC について三平方の定理から

$$\mathrm{QA}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{PQ}^2}$$
$$\mathrm{QB}=\sqrt{\mathrm{PB}^2-\mathrm{PQ}^2}$$
$$\mathrm{QC}=\sqrt{\mathrm{PC}^2-\mathrm{PQ}^2}$$

条件 PA＝PB＝PC より，QA＝QB＝QC が成り立つ。

ゆえに，点 Q は △ABC の外心である。