n を自然数とする。3つの整数

$$n^2+2,\ n^4+2,\ n^6+2$$

の最大公約数 A_n を求めよ。

＜ '22 京都大 ＞

【戦略】

ひとまず，n^2+2 と n^4+2 の最大公約数 G_n を求め，G_n が残りの n^6+2 も割り切るかどうかをチェックします。

$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6$ **であることから，ユークリッドの互除法により**

$$G(n^4+2,\ n^2+2)=G(n^2+2,\ 6)\ (=G_n)$$

ですから，G_n は n^2+2 と 6 の最大公約数ということになります。

6 との共通の約数を探ることになるため，n を 6 で割った余りで分類していくことになります。

$n^6+2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ G_n)$ $\left(\dfrac{n^6+2}{G_n}\text{ が整数}\right)$ **ということになれば**

$\dfrac{n^2+2}{G_n}$，$\dfrac{n^4+2}{G_n}$，$\dfrac{n^6+2}{G_n}$ **が全て整数ということになり，$A_n=G_n$ です。**

【解答】

一般の自然数 M，N $(M>N)$ に対して，M，N の最大公約数を $G(M,\ N)$ と表すことにする。

$$n^4+2=(n^2+2)(n^2-2)+6$$

ユークリッドの互除法より

$$G(n^4+2,\ n^2+2)=G(n^2+2,\ 6)\ (=G_n\text{ とおく。})$$

[1] $n=6m$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$n^2+2=36m^2+2$ であるため，$G_n=2$

このとき，$n^6+2=(6m)^6+2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ G_n)$

より，G_n は n^2+2，n^4+2，n^6+2 の全てを割り切る。

ゆえに，$A_n=G_n=2$

[2] $n=6m\pm 1$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき ※ $m=0$ のときの複号は $+$

$n^2+2=(6m\pm 1)^2+2=36m^2\pm 12m+3$ であり，$G_n=3$

このとき，$n^6+2=(6m\pm 1)^6+2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ G_n)$

より，G_n は n^2+2，n^4+2，n^6+2 の全てを割り切る。

ゆえに，$A_n=G_n=3$

[3] $n=6m\pm 2$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき ※ $m=0$ のときの複号は $+$

$n^2+2=(6m\pm 2)^2+2=36m^2\pm 12m+6$ であり，$G_n=6$

このとき，$n^6+2=(6m\pm 2)^6+2\equiv 66\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ G_n)$

より，G_n は n^2+2，n^4+2，n^6+2 の全てを割り切る。

ゆえに，$A_n=G_n=6$

[4] $n=6m+3$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$n^2+2=(6m+3)^2+2=36m^2+36m+11$ であり，$G_n=1$

このとき，$n^6+2=(6m+3)^6+2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ G_n)$

より，G_n は n^2+2，n^4+2，n^6+2 の全てを割り切る。

ゆえに，$A_n=G_n=1$

以上[1]，[2]，[3]，[4]から，

$$A_n=\begin{cases}2 & (n\text{ が }6\text{ の倍数のとき})\\ 3 & (n\text{ を }6\text{ で割った余りが }1\text{ または }5\text{ のとき})\\ 6 & (n\text{ を }6\text{ で割った余りが }2\text{ または }4\text{ のとき})\\ 1 & (n\text{ を }6\text{ で割った余りが }3\text{ のとき})\end{cases}\ \cdots\cdots\text{答}$$

【総括】

素因数分解ができればともかく，いきなり3つの数に対する最大公約数を扱うということはできませんから，まずは2つで考えましょう。

自然数 a，b，c （$a<b<c$）に対して

まずは $\boxed{a,\ b}$，c　この2つを割り切るできる限り大きい約数を考えたくなると思います。

なお，n^2+2 と n^4+2 の最大公約数 G_n が n^6+2 も割り切るということを式的に保証させることもできます。

今，

$$n^6+2=(n^2+2)(n^4-2n^2+4)-6$$

です。

ここで，ユークリッドの互除法により

$$G(n^4+2,\ n^2+2)=G(n^2+2,\ 6)\ (=G_n)$$

ですから，整数 α_n，β_n を用いて

$$n^2+2=G_n\alpha_n,\quad 6=G_n\beta_n$$

という形で表せます。

そうなると，

$$\begin{aligned}n^6+2&=G_n\alpha_n(n^4-2n^2+4)-G_n\beta_n\\&=G_n\,(\text{整数})\end{aligned}$$

という形で書けることになり，n^2+2，n^4+2 の最大公約数 G_n は n^6+2 も割り切ることが言え，結局は G_n そのものを求めればよいことになります。