箱の中に 1 から n までの番号がついた n 枚の札がある。ただし，$n \geqq 5$ とし，同じ番号の札はないとする。この箱から 3 枚の札を同時に取り出し，札の番号を小さい順に X, Y, Z とする。

このとき，$Y-X \geqq 2$ かつ $Z-Y \geqq 2$ となる確率を求めよ。

＜ '22 京都大 ＞

【戦略 1】

$X-Y$, $Z-Y$ という 2 つに関わっている Y の値を一つ固定します。

$Y=k$ と固定すると

X のとり得る値としては，1，2，⋯，$k-2$ の $k-2$ 通り

Z のとり得る値としては $k+2$，$k+3$，……，n の $n-(k+2)+1=n-k-1$【通り】

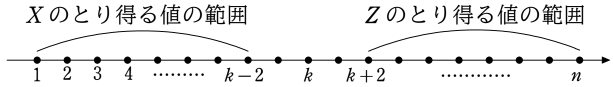
ですから，(X, k, Z) の値の組としては $(k-2)(n-k+1)$【通り】 あるわけです。

したがって題意を満たす (X, Y, Z) の総数は $k=3$，4，5，……，$n-2$ まで $\sum$ すればよく，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k+1)$ 通りです。

書き下してみると，結局は $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n-4}\ell\{(n-3)-\ell\}$ とまとめなおすことができます。

【解 1】

$Y=k$ $(k=3, 4, 5, \cdots, n-2)$ とする。



X のとり得る値としては，1，2，⋯，$k-2$ の $k-2$ 通り

Z のとり得る値としては $k+2$，$k+3$，……，n の
$n-(k+2)+1=n-k-1$【通り】

ゆえに，$Y=k$ としたときに題意を満たす (X, Z) の決め方は

$$(k-2)(n-k+1)\text{【通り】}$$

ゆえに，題意を満たす (X, Y, Z) の決め方は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=3}^{n-2}(k-2)(n-k+1)\\
&=1\cdot(n-4)+2\cdot(n-5)+3\cdot(n-6)+\cdots\cdots+(n-4)\cdot 1\\
&=\sum_{\ell=1}^{n-4}\ell\{(n-3)-\ell\}\\
&=(n-3)\cdot\frac{(n-4)(n-3)}{2}-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)\{2(n-4)+1\}\\
&=\frac{1}{2}(n-4)(n-3)^2-\frac{1}{6}(n-4)(n-3)(2n-7)\\
&=\frac{1}{6}(n-3)(n-4)\{3(n-3)-(2n-7)\}\\
&=\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)\text{【通り】}
\end{aligned}$$

求める確率は

$$\frac{\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}$$

$$=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}\ \cdots\text{答}$$

【戦略 2】

幅が 1 のものを含む組を除外するという余事象的発想でも解くことができます。

$Y-Z=1$ となるものの個数を数えてみます。

$k=2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ として

$$(X,\ Y,\ Z)=(X,\ k,\ k+1)$$

と k を固定します。

X のとり得る値としては $1,\ 2,\ \cdots,\ k-1$ の $k-1$ 通りですから

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n-1}(k-1)&=1+2+\cdots\cdots+(n-2)\\&=\sum_{\ell=1}^{n-2}\ell\\&=\frac{(n-2)(n-1)}{2}\ \text{【通り】}\end{aligned}$$

が $Y-Z=1$ となるものの個数です。

$Y-X=1$ となるものの個数も対称性から同様に $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$【通り】です。

$Y-X=1$ かつ，$Z-Y=1$ となるものは
$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (n-2,\ n-1,\ n)$ の $n-2$ 通りです。

したがって，$Y-X=1$ または $Z-Y=1$ となる $(X,\ Y,\ Z)$ の組は

$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}\times 2-(n-2)=(n-2)^2$【通り】 ということになります。

【解 2】

$Y-Z=1$ となるとき，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1$ として

$$(X,\ Y,\ Z)=(X,\ k,\ k+1)$$

X のとり得る値は $1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ k-1$ の $k-1$ 通りであるため
$Y-Z=1$ となるような $(X,\ Y,\ Z)$ の組は

$$\sum_{k=2}^{n-1}(k-2)=1+2+\cdots\cdots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}\ \text{【通り】}$$

対称性から $Y-X=1$ となる $(X,\ Y,\ Z)$ の組も $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2}$【通り】

$Y-X=1$ かつ $Z-Y=1$ となる $(X,\ Y,\ Z)$ の組は

$$(X,\ Y,\ Z)=(1,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 4),\ \cdots\cdots,\ (n-2,\ n-1,\ n)$$

の $n-2$ 通り

したがって，$Y-X=1$ または $Z-Y=1$ となる $(X,\ Y,\ Z)$ の組は

$$\frac{(n-2)(n-1)}{2}\times 2-(n-2)=(n-2)^2\ \text{【通り】}$$

ゆえに，$Y-X=1$ または $Z-Y=1$ となる確率は

$$\frac{(n-2)^2}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{(n-2)^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{6(n-2)}{n(n-1)}$$

求める確率は余事象を考えて

$$\begin{aligned}1-\frac{6(n-2)}{n(n-1)}&=\frac{n(n-1)-6(n-2)}{n(n-1)}\\&=\frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)}\ \cdots\text{答}\end{aligned}$$

【戦略 3】

経験が必要なものの見方をしますが

$$\begin{cases} X'=X \\ Y'=Y-1 \\ Z'=Z-2 \end{cases}$$

という X', Y', Z' ($X'<Y'<Z'$) を考える変数変換を考えます。

例えば

$(X', Y', Z')=(1, 2, 4)$ **に対しては** $(X, Y, Z)=(1, 3, 6)$
$(X', Y', Z')=(3, 5, 6)$ **に対しては** $(X, Y, Z)=(3, 6, 8)$
$(X', Y', Z')=(5, 6, 7)$ **に対しては** $(X, Y, Z)=(5, 7, 9)$

などというように (X', Y', Z') **は幅が** 2 **以上とは限りませんが**
X, Y, Z **の方は幅が** 2 **以上になっています。**

もちろん，
$(X', Y', Z')=(3, 5, 9)$ **のように最初から幅が** 2 **以上あるような場合でも**
$(X, Y, Z)=(3, 6, 11)$ **と幅が** 2 **以上という条件は満たしたままです。**

(X', Y', Z') **と** (X, Y, Z) **は** 1 **対** 1 **に対応しますから** (X', Y', Z') **の個数を考えてもいいわけです。**

しかも (X', Y', Z') **の方は幅に関係ないフリーダムな選び方ですから非常に楽に数えることができます。**

注意したいのは， Z **は最大** n **までしかあり得ませんから** Z' **としてあり得る値は** $n-2$ **までです。**

【解 3】

$\begin{cases} X'=X \\ Y'=Y-1 \quad \cdots(*) \\ Z'=Z-2 \end{cases}$ という X', Y', Z' ($X'<Y'<Z'$) を考える。

$1\leqq X'<Y'<Z'\leqq n-2$ を満たすような整数の組 (X', Y', Z') を一つ定めると，

$$\begin{aligned} Y-X &= (Y'+1)-X' \\ &= (Y'-X')+1 \\ &\geqq 2 \ (\because\ Y'>X' \text{ で，} Y', X' \text{ は整数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z-Y &= (Z'+2)-(Y'+1) \\ &= (Z'-Y')+1 \\ &\geqq 2 \ (\because\ Z'>Y' \text{ で，} Z', Y' \text{ は整数}) \end{aligned}$$

であり，$\begin{cases} 1\leqq X<Y<Z\leqq n \\ Y-X\geqq 2 \\ Z-Y\geqq 2 \end{cases}$ を満たす (X, Y, Z) が一つ定まる。

逆に $\begin{cases} 1\leqq X<Y<Z\leqq n \\ Y-X\geqq 2 \\ Z-Y\geqq 2 \end{cases}$ を満たす (X, Y, Z) を一つ定めると，

$$\begin{aligned} Y'-X' &= (Y-X)-1>0 \\ Z'-Y' &= (Z-Y)-1>0 \end{aligned}$$

であり，$1\leqq X'<Y'<Z'\leqq n-2$ となる (X', Y', Z') が一つ定まる。

ゆえに，$\begin{cases} 1\leqq X<Y<Z\leqq n \\ Y-X\geqq 2 \\ Z-Y\geqq 2 \end{cases}$ を満たす整数の組 (X, Y, Z) の個数は

$1\leqq X'<Y'<Z'\leqq n-2$ となる整数の組 (X', Y', Z') の個数に等しく

$${}_{n-2}\mathrm{C}_3 \text{【通り】}$$

したがって，求める確率は

$$\frac{{}_{n-2}\mathrm{C}_3}{{}_{n}\mathrm{C}_3} = \frac{\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$$

$$= \frac{(n-3)(n-4)}{n(n-1)} \quad \cdots \text{答}$$

【総括】

【解 3】は京大受験生であれば目にしたことがある考え方だと思いますが，スムーズに試験場で出てくるかは別問題でしょう。

ただ，それなりにストレートな【解 1】や【解 2】でも愚直に押し切れます。

対称性が目につけば【解 2】の路線が若干早いですが，それが目につかなくとも，まじめに

$Y-X=1$ となるとき，$k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-2$ として

$$(X,\ Y,\ Z)=(k,\ k+1,\ Z)$$

Z のとり得る値は $k+2,\ k+3,\ \cdots\cdots,\ n$ の

$$n-(k+2)+1\ (\ =n-k-1)\text{【通り】}$$

よって，$Y-X=1$ となるような $(X,\ Y,\ Z)$ の組は

$$\sum_{k=1}^{n-2}(n-k-1)=(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2}\text{【通り】}$$

としてもたかがしれています。

今年のセットでは確保したい問題の一つと言いたいところですが，確率分野に苦手意識がある人も多く，確保しきれなかったという人もそれなりにいるとは思います。