座標平面において，t を媒介変数として

$$x=e^{t}\cos t+e^{\pi},\quad y=e^{t}\sin t\quad (0\leqq t\leqq \pi)$$

で表される曲線を C とする。

曲線 C と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

＜ ’22 大阪大 ＞

【戦略】

パラメータ表示された曲線で囲まれた図形の面積を考えるという基本の内容であり，方針面ではやることは決まっています。

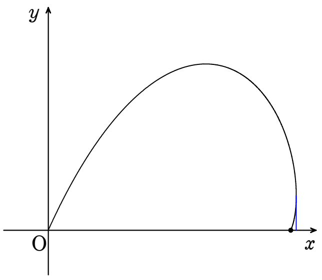
ひとまず，グラフの概形を得るために，このパラメータ曲線を図示します。

パラメータ曲線の増減表については

t の変化に伴って，$\begin{cases} x \text{ 座標が増えるのか減るのか} \\ y \text{ 座標が増えるのか減るのか} \end{cases}$ について考えるため

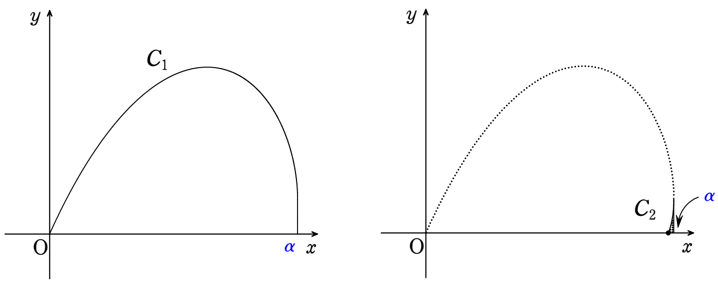
$\dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{dy}{dt}$ の符号を追っていくことになります。

このあたりをきちんと処理すれば



という概形を得ます。

今回考える部分は面積をくり抜く必要があるため，



と，C を 2 つに分けて考えることになります。

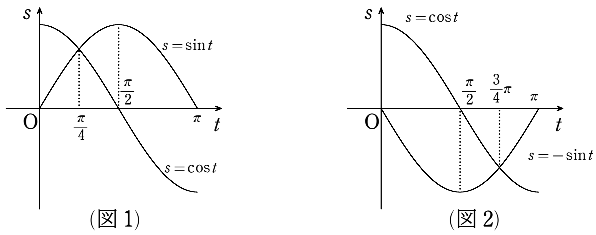
分けるとは言っても，$\begin{cases} x=e^{t}\cos t+e^{\pi} \\ y=e^{t}\sin t \end{cases}$ という x，y を与える式自体は同じで，パラメータ t の範囲が異なるだけです。

それぞれの面積をバラバラに計算してもよいですが，$\int$ の中身自体は同じで，積分区間のみが異なるため，うまくまとめられないか目を光らせながら計算しましょう。

【解答】

$$\frac{dx}{dt}=(e^{t})'\cos t+e^{t}(\cos t)'=e^{t}(\cos t-\sin t)$$

$$\frac{dy}{dt}=(e^{t})'\sin t+e^{t}(\sin t)'=e^{t}\{\cos t-(-\sin t)\}$$

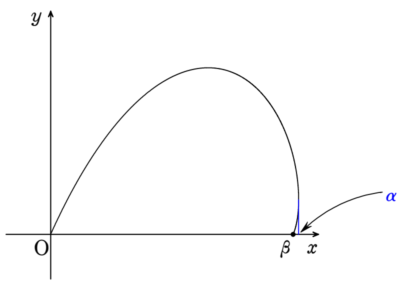


(図 1)　(図 2)

$\dfrac{dx}{dt}$ の符号は (図 1) のグラフの上下，$\dfrac{dy}{dt}$ の符号については (図 2) のグラフの上下で判断し，増減表をかくと

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
x	$\rightarrow$	$\rightarrow$	$\cdot$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$	$\leftarrow$
$\frac{dy}{dt}$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\cdot$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\uparrow$	$\nwarrow$	$\leftarrow$	$\swarrow$	$\swarrow$
(x,y)	$(e^{\pi}+1,0)$						$(0,0)$

曲線 C の概形は

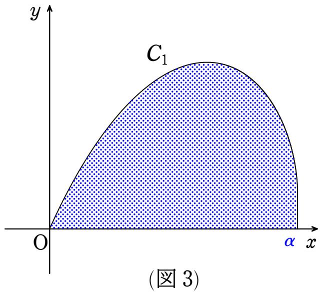


ただし，$\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\pi}$，$\beta=e^{\pi}+1$ とおいた。

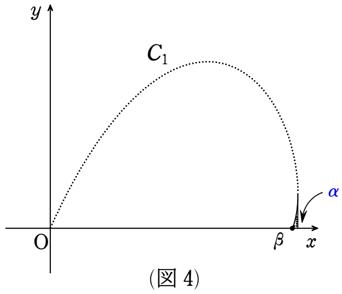
$$C_1:\begin{cases} x=e^{t}\cos t+e^{\pi} \\ y=e^{t}\sin t \end{cases}\quad \left(\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq \pi\right)$$

$$C_2:\begin{cases} x=e^{t}\cos t+e^{\pi} \\ y=e^{t}\sin t \end{cases}\quad \left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{4}\right)$$

とする。



(図 3)



(図 4)

(図 3)，(図 4) より，求める面積を S とすると

$$S=\int_0^{\alpha} y\,dx-\int_{\beta}^{\alpha} y\,dx$$

$$=\int_{\pi}^{\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{dt}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=-\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} y\frac{dx}{dt}\,dt+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt\right\}$$

$$=-\int_0^{\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi}(e^t\sin t)\,e^t(\cos t-\sin t)\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi}(e^{2t}\sin t\cos t-e^{2t}\sin^2 t)\,dt$$

$$=-\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t-\frac{1}{2}e^{2t}(1-\cos 2t)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)\,dt$$

$I_1=\int_0^{\pi}e^{2t}\,dt$，$I_2=\int_0^{\pi}e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)\,dt$ とする。

$$I_1=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}(e^{2\pi}-1)$$

また，

$$\begin{aligned}(e^{2t}\sin 2t)'&=2e^{2t}\sin 2t+2e^{2t}\cos 2t\\&=2e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)\end{aligned}$$

すなわち，$\left(\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t\right)'=e^{2t}(\sin 2t+\cos 2t)$ であることから

$$I_2=\left[\frac{1}{2}e^{2t}\sin 2t\right]_0^{\pi}=0$$

ゆえに，

$$S=\frac{1}{2}I_1-\frac{1}{2}I_2=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)\ \cdots 答$$

【総括】

パラメータ表示で与えられた曲線の

概形，面積，回転体の体積，弧長

についての扱いは準備していて当然です。

計算量などは問題による部分はありますが，やることで困っていてはなりません。

(ウンチク)

本問は等角螺旋と呼ばれる有名曲線です。

本問は x 軸方向に e^{π} 平行移動しているだけで，$\begin{cases}x=e^t\cos t\\y=e^t\sin t\end{cases}$ で与えられた曲線と x 軸で囲まれる図形を考えても面積は変わりません。

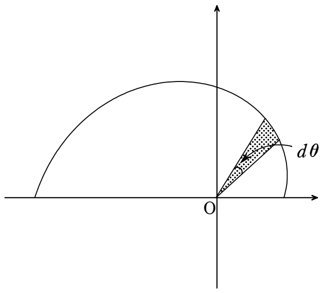
以下，$\begin{cases}x=e^{\theta}\cos\theta\\y=e^{\theta}\sin\theta\end{cases}$ と文字を θ とします。

この等角螺旋は，$\sqrt{x^2+y^2}=e^{\theta}$ であることから，極方程式としては

$$r=e^{\theta}\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$$

と与えられます。

極方程式 $r=f(\theta)$ で囲まれる面積公式 $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}r^2\,d\theta$ (扇形近似) を用いると



$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}e^{2\theta}\,d\theta\\&=\frac{1}{4}\left[e^{2\theta}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{4}(e^{2\pi}-1)\end{aligned}$$

と，本問の結果が検算できると思います。

ただ，採点基準が何とも言えない以上，あくまで検算にとどめておきます。