$f(x)=\log(x+1)+1$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=x$ は，$x>0$ の範囲でただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2) (1) の解を $\alpha$ とする。実数 $x$ が $0<x<\alpha$ を満たすならば，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0<\frac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=1,\ x_{n+1}=f(x_n)\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

で定める。このとき，すべての自然数 $n$ に対して，

$$\alpha-x_{n+1}<\frac{1}{2}(\alpha-x_n)$$

が成り立つことを示せ。

(4) (3) の数列 $\{x_n\}$ について，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ を示せ。

< ’22 大阪大 >

【戦略】

(1) **$g(x)=f(x)-x$ と設定し，$g(x)=0$ が $x>0$ の範囲で 1 つだけ実数解をもつことを示します。**

**$g(x)$ の $x>0$ における単調性と，異符号の値をとり得ることの確認が目標となります。**

(2) **(1) の $\alpha$ は $f(\alpha)=\alpha$ を満たします。($f$ を施しても変化しない不動の値ということで，不動点と言います。)**

**示すべき不等式は $0<\dfrac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$ ということで，形から**

**平均値の定理**

**をインスピレーションします。**

(3) **示すべき不等式から，$\dfrac{\alpha-x_{n+1}}{\alpha-x_n}<\dfrac{1}{2}$ という形で上から押さえられていればよいことになります。**

**$x_n$ が (2) の適用条件を満たせば，$\begin{cases}x_{n+1}=f(x_n)\\ f(\alpha)=\alpha\end{cases}$ であることから**

$$\frac{\alpha-x_{n+1}}{\alpha-x_n}<f'(x_n)=\frac{1}{1+x_n}$$

**を満たします。**

**つまり，$x_n\geqq 1$ であることが言えれば解決です。**

**ただし，分母を払う際に，$\alpha-x_n>0$ であることも言う必要がありますので，$1\leqq x_n<\alpha$ であることを示します。**

**もちろん，漸化式で与えられる数列に関する証明なので，帰納法が最有力候補です。**

(4) **$0<\alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)$ という不等式を用いて，番号を下げていくと**

$$0<\alpha-x_n<\frac{1}{2}(\alpha-x_{n-1})<\left(\frac{1}{2}\right)^2(\alpha-x_{n-2})<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha-x_1)$$

**となり，$0<\alpha-x_n<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha-1)$ を得て，はさみうちの原理から仕留めることができます。**

【解答】

(1) $g(x)=f(x)-x$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}-1=-\frac{x}{x+1}<0\quad(\because\ x>0)$$

ゆえに，$x>0$ の範囲で $g(x)$ は単調減少。… ①

また，$g(0)=1\ (>0)$ … ②

$$\begin{aligned}g(3)&=(\log 4+1)-3\\&=\log 4-\log e^2\end{aligned}$$

$e>2$ より，$e^2>4$ であるから，$g(3)<0$ … ③

$g(x)$ は $x>0$ の範囲で連続であるため，①，②，③ から
$g(x)=0$ となる $x$ が $0<x<3$ の範囲にただ 1 つ存在する。

よって，題意は示された。

(2) 平均値の定理から，

$$\begin{cases}\dfrac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}=f'(\beta)\ \cdots(ア)\\ x<\beta<\alpha\ \cdots(イ)\end{cases}$$

となる $\beta$ が存在する。

(イ) の辺々は全て正の値であるため，$\dfrac{1}{\alpha+1}<\dfrac{1}{\beta+1}<\dfrac{1}{x+1}$

(1) の $\alpha$ は $\alpha>0$ であるため，$0<\dfrac{1}{\alpha+1}$ にも注意すると，

$$0<f'(\beta)<f'(x)$$

(ア) より，$0<\dfrac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$

一方，(1) の $\alpha$ は $f(\alpha)=\alpha$ を満たすため，$0<\dfrac{\alpha-f(x)}{\alpha-x}<f'(x)$
が成り立ち，題意は示された。

(3) $1\leqq x_n<\alpha$ … $(*)$ であることを $n$ についての数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき 条件 $x_1=1$ から，$(*)$ は成立する。

[2] $n=k$ $(k=1,2,3,\cdots)$ のとき，$1\leqq x_k<\alpha$ と仮定する。

$f(x)$ は増加関数ゆえ，$f(1)\leqq f(x_k)<f(\alpha)$

つまり，$\log 2+1\leqq x_{k+1}<\alpha\ \left(\because\ \begin{cases}x_{k+1}=f(x_k)\\ f(\alpha)=\alpha\end{cases}\right)$

$1<\log 2+1$ であるため，$1<x_{k+1}<\alpha$ となり，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する。

[1]，[2] より，$n=1,2,3,\cdots$ に対して，$1\leqq x_n<\alpha$

(2) の結果から，$\dfrac{\alpha-f(x_n)}{\alpha-x_n}<f'(x_n)=\dfrac{1}{x_n+1}\leqq\dfrac{1}{2}$

すなわち，$\alpha-x_{n+1}<\dfrac{1}{2}(\alpha-x_n)$ が成り立ち，題意は示された。

(4)　(3)，および $\alpha-x_n>0$ であることから

$$0<\alpha-x_n<\frac{1}{2}(\alpha-x_{n-1})<\left(\frac{1}{2}\right)^2(\alpha-x_{n-2})<\cdots\cdots<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha-x_1)$$

すなわち，$0<\alpha-x_n<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha-1)$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha-1)=0$ で，はさみうちの原理から

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha-x_n)=0$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha$ が成り立つ。

【総括】

「縮小関数」による漸化式で定まる数列の極限という頻出のテーマです。
（力学系，リプシッツ条件というキーワードで押さえている人もいます。）

いずれにせよ

$$\begin{cases}\text{不動点の存在}\\ x_{n+1}=f(x_n)\\ f'\text{の範囲}\end{cases}$$

というこのテーマを特徴づけるキーワードを見落としてはなりません。

平均値の定理から，漸化不等式（この表現はここだけのものと思ってください）を用いてはさみうちの原理で仕留める一連のストーリーは，阪大受験生であれば経験していて然るべきもので，試験場で初めましてというのは，厳しいことを言うようですが準備不足と言わざるを得ません。