正の実数 t に対し，座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ t)$ と $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 0\right)$ を考える。t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動くとき，座標平面内で線分 PQ が通過する部分を図示せよ。

< ’22 大阪大 >

【戦略 1】順像法

通過領域の倒し方として，順像法，逆像法 という 2 路線ありますが，ひとまず順像法で処理することを考えます。

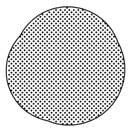
線分 PQ の方程式は

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y = -t^2 x + t \end{cases}$$

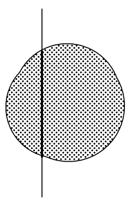
として与えられます。

t を $1 \leqq t \leqq 2$ で動かしたとき，この線分の通過領域を求めたいわけですが，一気に目で追うのは難しいものがあると思います。

そこで，題意の通過領域が仮に

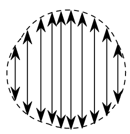


だったとします。

これを $x=k$ で切った切り口は，  **となります。**

この切り口の y 座標がどこからどこまでを取り得るかについて考えていくわけです。

各々の k に対して，$(k,\ y)$ の y が　☆$\leqq y \leqq$★　のように範囲が分かれば上と下の境界線の情報が得られることになり，k を動かしていくことで全体像が把握できるということです。



<イメージ>

このイメージをもってして，巷では「ファクシミリの原理」などと呼ばれているようですが，ファクシミリ自体最近の人たちはピンとこないかもしれません。(プリンターの方がまだイメージできる？)

【解 1】

2 点 P，Q を通る直線の方程式は，$y = \dfrac{0-t}{\frac{1}{t}-0}x + t$

すなわち，$y = -t^2 x + t$

ゆえに線分 PQ の方程式は

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y = -t^2 x + t \end{cases}$$

$x = k$ ($\geqq 0$) で切ったときの線分の切り口は

$$点\ (k,\ -kt^2 + t)$$

t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で変化するときの，$f(t) = -kt^2 + t$ のとり得る値を調べる。

[1]　$k = 0$ のとき

$f(t) = t$ であり，$1 \leqq t \leqq 2$ で t を動かしたとき，$1 \leqq f(t) \leqq 2$

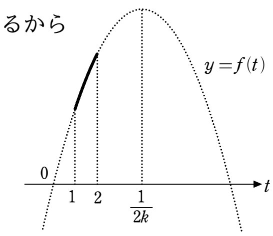
ゆえに，この通過領域を $x = 0$ で切ったときの切り口は

$$線分 \begin{cases} x = 0 \\ 1 \leqq y \leqq 2 \end{cases}$$

[2]　$k > 0$ のとき

$f(t) = -kt^2 + t$ のグラフは上に凸の放物線である。

[2−1]　$0 < k \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき，$2 \leqq \dfrac{1}{2k}$ であるから



$f(1) \leqq f(t) \leqq f(2)$，すなわち

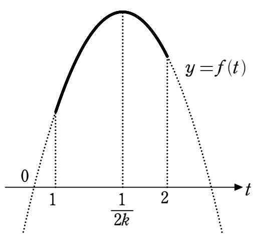
$-k+1 \leqq f(t) \leqq -4k+2$

ゆえに，この通過領域を

$x = k\left(0 < k \leqq \dfrac{1}{4}\right)$ で切ったときの切り口は

$$線分 \begin{cases} x = k \\ -k+1 \leqq y \leqq -4k+2 \end{cases}$$

[2−2]　$\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{1}{2k} \leqq 2$ であるから



$f(1) \leqq f(t) \leqq f\left(\dfrac{1}{2k}\right)$，すなわち

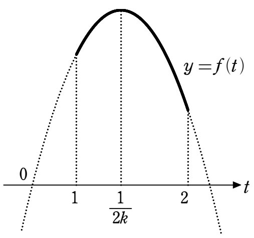
$-k+1 \leqq f(t) \leqq \dfrac{1}{4k}$

ゆえに，この通過領域を

$x = k\left(\dfrac{1}{4} \leqq k \leqq \dfrac{1}{3}\right)$ で切ったときの切り口は

$$線分 \begin{cases} x = k \\ -k+1 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4k} \end{cases}$$

[2−3]　$\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$1 \leqq \dfrac{1}{2k} \leqq \dfrac{3}{2}$ であるから



$f(2) \leqq f(t) \leqq f\left(\dfrac{1}{2k}\right)$，すなわち

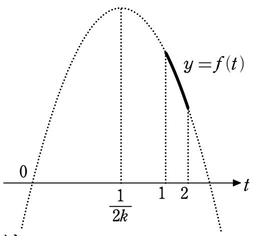
$$-4k+2 \leqq f(t) \leqq \frac{1}{4k}$$

ゆえに，この通過領域を

$x=k\ \left(\dfrac{1}{3} \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ で切ったときの切り口は

線分 $\begin{cases} x=k \\ -4k+2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4k} \end{cases}$

[2−4]　$k \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$\dfrac{1}{2k} \leqq 1$ であるから



$f(2) \leqq f(t) \leqq f(1)$，すなわち

$$-4k+2 \leqq f(t) \leqq -k+1$$

ゆえに，この通過領域を

$x=k\ \left(k \geqq \dfrac{1}{2}\right)$ で切ったときの切り口は

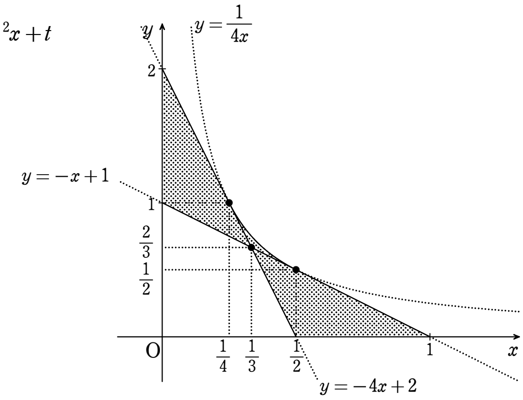
線分 $\begin{cases} x=k \\ -4k+2 \leqq y \leqq -k+1 \end{cases}$

以上から，求める通過領域は

$$\begin{cases} x=0 \text{ のとき} & 1 \leqq y \leqq 2 \\ 0<x \leqq \dfrac{1}{4} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq -4x+2 \\ \dfrac{1}{4} \leqq x \leqq \dfrac{1}{3} \text{ のとき} & -x+1 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ \dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -4x+2 \leqq y \leqq \dfrac{1}{4x} \\ x \geqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき} & -4x+2 \leqq y \leqq -x+1 \end{cases} \quad \text{かつ} \quad y \geqq 0$$

これを図示すると

$y=-t^2x+t$



（ただし，境界線は含む）

【戦略 2】逆像法

今回は線分の通過領域ということで少し厄介です。

そこで，ひとまず「直線」PQ の通過領域を考え，最後に x 軸と y 軸で「カット」するという作戦で考えます。

直線 PQ：$y=-t^2x+t$ の通過領域を D' とするとき

$(3,\ -2)$ って D' に入ってる？

と考えたければ，$-2=-3t^2+t$ を満たす t が $1 \leqq t \leqq 2$ に存在するかどうかが問題です。（この場合，$3t^2-t-2=0$，すなわち $(3t+2)(t-1)=0$ で $t=1$ と仕組めば，$(3,\ -2)$ を通るように仕組めるということになります。）

$(2,\ 1)$ って D' に入ってる？
$(4,\ -1)$ って D' に入ってる？
⋮

としらみつぶしに調べるイメージで

$(X,\ Y)$ って D' に入ってる？入っているならどんな $(X,\ Y)$？

というように考えます。

先ほどの具体例が分かっていれば，$Y=-t^2X+t$ を満たす t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ存在すればよいことになります。

$Xt^2-t+Y=0$ という t についての 2 次方程式が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲に少なくとも 1 つ解をもつとやるのは少し億劫なので，

$y=-Xt^2+t\ (1 \leqq t \leqq 2)$ と $y=Y$ というグラフの交点が少なくとも 1 つ共有点をもてばよいという方向（定数分離）で処理するのがやりやすいでしょう。

【解 2】

ひとまず，$1 \leqq t \leqq 2$ の範囲で t を動かしたときの直線 PQ の通過領域を D' として，D' 求める。

2 点 P，Q を通る直線の方程式は，$y=\dfrac{0-t}{\dfrac{1}{t}-0}x+t$

すなわち，$y=-t^2x+t$

(X, Y) が D に含まれる $\Leftrightarrow$ $Y=-Xt^2+t$ を満たす t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲に存在する。

$f(t)=-Xt^2+t$ とし，$y=f(t)$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ と，$y=Y$ のグラフの交点が存在する条件を考えればよい。

以下，この通過領域は $X \geqq 0$，$Y \geqq 0$ の領域に含まれることに注意する。

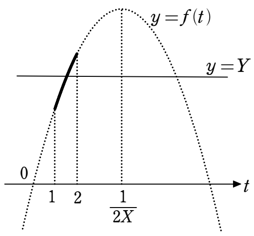
[1]　$X=0$ のとき，$f(t)=t$ より，$1 \leqq Y \leqq 2$ であればよい。

[2]　$X>0$ のとき

[2−1]　$2 \leqq \dfrac{1}{2X}$，すなわち $0<X \leqq \dfrac{1}{4}$ のとき

$f(1) \leqq Y \leqq f(2)$
であればよい。

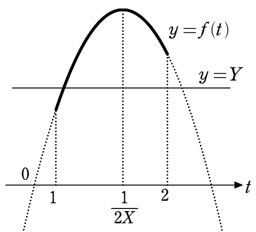
$-X+1 \leqq Y \leqq -4X+2$



[2−2]　$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{1}{2X} \leqq 2$，すなわち $\dfrac{1}{4} \leqq X \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき

$f(1) \leqq Y \leqq f\left(\dfrac{1}{2X}\right)$
であればよい。

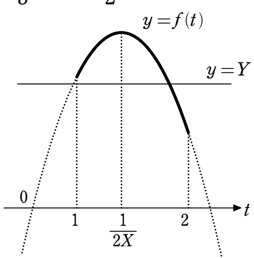
$-X+1 \leqq Y \leqq \dfrac{1}{4X}$



[2−3]　$1 \leqq \dfrac{1}{2X} \leqq \dfrac{3}{2}$，すなわち $\dfrac{1}{3} \leqq X \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(2) \leqq Y \leqq f\left(\dfrac{1}{2X}\right)$
であればよい。

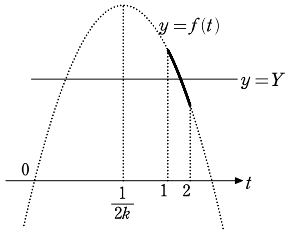
$-4X+2 \leqq Y \leqq \dfrac{1}{4X}$



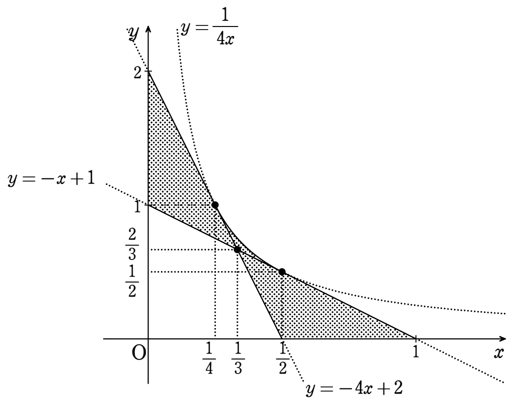
[2−4]　$\dfrac{1}{2X} \leqq 1$，すなわち $X \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$f(2) \leqq Y \leqq f(1)$
であればよい。

$-4X+2 \leqq Y \leqq -X+1$



D' のうち，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の領域に含まれるものが求める通過領域 D であり，それを図示すると



（ただし，境界線は含む）

【戦略 3】

$g(t)=-t^2x+t$ **とすると，** $g(t)=-x\left(t-\dfrac{1}{2x}\right)^2+\dfrac{1}{4x}$ **です。**

これより， $g(t)-\dfrac{1}{4x}=-x\left(t-\dfrac{1}{2x}\right)^2$ **です。**

これが意味するところは， $y=g(t)$ **と** $y=\dfrac{1}{4x}$ **を連立すると，** $t=\dfrac{1}{2x}$ **という重解が得られるということです。（見方を変えれば，** $x=\dfrac{1}{2t}$ **が接点）**

このことから， $y=g(t)$ **という直線は，曲線** $y=\dfrac{1}{4x}$ **の** $\left(\dfrac{1}{2t},\ \dfrac{t}{2}\right)$ **における接線ということになります。**

解答では天下り的に記述してしまいます。

【解 3】

2 点 P，Q を通る直線の方程式は，$y=\dfrac{0-t}{\dfrac{1}{t}-0}x+t$

すなわち，$y=-t^2x+t$

さて，一方，曲線 $y=\dfrac{1}{4x}$ $(x>0)$ に対し，$y'=-\dfrac{1}{4x^2}$ であり，この曲線上の点 $\left(\dfrac{1}{2t},\ \dfrac{t}{2}\right)$ における接線の傾きは $-\dfrac{1}{4\cdot\dfrac{1}{4t^2}}=-t^2$

よって，曲線 $y=\dfrac{1}{4x}$ $(x>0)$ 上の点 $\left(\dfrac{1}{2t},\ \dfrac{t}{2}\right)$ における接線の式は

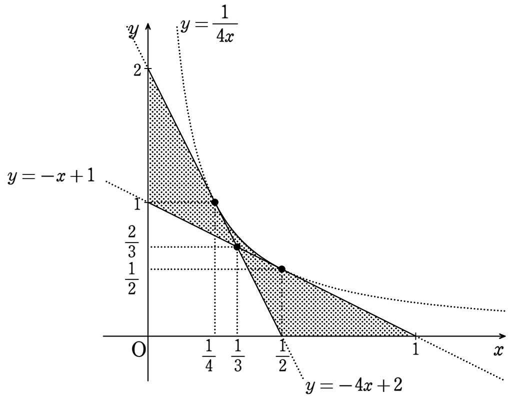
$$y=-t^2\left(x-\frac{1}{2t}\right)+\frac{t}{2}$$

すなわち

$$y=-t^2x+t$$

で，これは直線 PQ に他ならない。

したがって，$1\leqq t\leqq 2$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は
$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の領域に含まれることに注意すると



（ただし，境界線は含む）

【総括】

線分の通過領域という難関大では頻出のトピックスです。

【解 1】の順像法はオーソドックスな正攻法で，【解 2】の逆像法もよくやる手法の一つです。

逆像法の場合，線分の通過領域だと若干厄介であるため，ひとまず直線の通過領域を出して，x 軸，y 軸でカットしてやるという作戦で捌きました。

【解 3】の包絡線という路線は知識的側面が強いため，どちらかというと観賞用の解答です。

話題そのものの難易度は高いですが，難関大では登場する頻度は高く，
きちんと準備して打ち返したいという類の問題です。