$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\cos 4\alpha=\cos 3\alpha$ であることを示せ。

(2)　$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ とするとき，$f(\cos\alpha)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\cos\alpha$ は無理数であることを示せ。

＜ ’22 大阪大 ＞

【戦略】

(1)　$7\alpha=2\pi$ **なので，** $4\alpha+3\alpha=2\pi$ **と見ます。**

(2)　$\cos 4\alpha$，$\cos 3\alpha$ **を** $\cos\alpha$ **で表すことを考えていきます。**

$\cos 3\alpha$ **については** 3 **倍角の公式** $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ **として一発で捌きます。**

$\cos 4\alpha$ **についてはひとまず，** $\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1$ **と** 2 **倍角の公式を一発かまし，さらに，** $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ **ともう一発かませばよいでしょう。**

これにより， $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ **，すなわち**

$$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=0$$

を得ますが，

$$(\cos\alpha-1)(8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1)=0$$

と因数分解できますので， $\cos\alpha\fallingdotseq 1$ **であることを考えれば証明完了です。**

(3)　**もちろん背理法です。**

$\cos\alpha$ **は正なので，** $\cos\alpha=\dfrac{q}{p}$ $(p$，q は互いに素な正の整数$)$ **とおけます。**

(2) **から** $\cos\alpha$ **が** $8x^3+4x^2-4x-1=0$ **という** 3 **次方程式の有理数解であることが分かっていますから，**

$\dfrac{8q^3}{p^3}+\dfrac{4q^2}{p^2}-\dfrac{4q}{p}-1=0$ **が成り立ちます。**

経験的，知識的側面がモノを言いますが，もし，この 3 **次方程式が有理数解をもつのだとすれば**

$$\frac{1\,\text{の約数}}{8\,\text{の約数}}$$

という形に限られます。

つまり， $q=1$，$p=1$，2，4，8 **という可能性しかなくなります。**

あとは，個別検証で全て不適であることが言えれば解決です。

なお，上記の有名事実については，

整数＝分数 の形を狙って分母を睨む

というこれまた有名な態度で導出します。

【解答】

(1)　$7\alpha=2\pi$ より，$4\alpha+3\alpha=2\pi$

これより，
$$\begin{aligned}\cos 4\alpha&=\cos(-3\alpha+2\pi)\\&=\cos(-3\alpha)\\&=\cos 3\alpha\ (\because\ \text{一般に}\cos(-\theta)=\cos\theta)\end{aligned}$$

ゆえに，題意は示された。

(2)
$$\begin{aligned}\cos 4\alpha&=2\cos^2 2\alpha-1\\&=2\{2\cos^2\alpha-1\}^2-1\\&=2(4\cos^4\alpha-4\cos^2\alpha+1)-1\\&=8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1\end{aligned}$$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

(1) より $8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

すなわち，$8\cos^4\alpha-4\cos^3\alpha-8\cos^2\alpha+3\cos\alpha+1=0$

これより，$(\cos\alpha-1)(8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1)=0$

$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ より，$\cos\alpha\fallingdotseq 1$ であるから，

$$8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1=0$$

ゆえに，$f(x)=8x^3+4x^2-4x-1$ に対して，$f(\cos\alpha)=0$ である。

(3)　$\cos\alpha$ が有理数だと仮定する。

$\cos\alpha>0$ であることに注意すると，

$$\cos\alpha=\frac{q}{p}\ (p,\ q\ \text{は互いに素な正の整数})$$

とおける。

(2) より，$\dfrac{8q^3}{p^3}+\dfrac{4q^2}{p^2}-\dfrac{4q}{p}-1=0$

両辺 p^3 をかけると，$8q^3+4pq^2-4p^2q-p^3=0$

これより，$q(8q^2+4pq-4p^2)=p^3$

整数＝分数

すなわち，$8q^2+4pq-4p^2=\dfrac{p^3}{q}$ であり，左辺は整数なので右辺も整数

p，q は互いに素であるため，$q=1$

このとき，$8+4p-4p^2-p^3=0$

$$\begin{aligned}-p^3&=4p^2-4p-8\\&=4(p^2-p-2)\\&=4(p-2)(p+1)\ \cdots(*)\end{aligned}$$

整数＝分数

一方，$p(p^2+4p-4)=8$ なので，$p^2+4p-4=\dfrac{8}{p}$

$\dfrac{8}{p}$ が整数ゆえ，$p=1$，2，4，8 だが，どれも $(*)$ を満たさず不合理。

以上から，仮定は誤りで，$\cos\alpha$ は無理数である。

【戦略 2】(3) について

$2\cos\alpha$ が無理数であることを示してもよいでしょう。

そうすると，扱う 3 次方程式は
最高次の係数が 1 の方程式 (モニック方程式)
となり，若干楽になります。

【解 2】(3) について

(2) より $8\cos^3\alpha+4\cos^2\alpha-4\cos\alpha-1=0$

すなわち，$(2\cos\alpha)^3+(2\cos\alpha)^2-2\cdot(2\cos\alpha)-1=0$ であるため

$x^3+x^2-2x-1=0$ は，$x=2\cos\alpha$ を解にもつ。

$2\cos\alpha$ が有理数だと仮定すると

$$2\cos\alpha=\frac{\ell}{k}\ (k,\ \ell \text{ は互いに素な正の整数})$$

とおける。

ゆえに，$\dfrac{\ell^3}{k^3}+\dfrac{\ell^2}{k^2}-\dfrac{2\ell}{k}-1=0$

両辺 k^2 をかけると，$\dfrac{\ell^3}{k}+\ell^2-2k\ell-k^2=0$

すなわち，$\dfrac{\ell^3}{k}=-\ell^2+2k\ell+k^2$

ゆえに，$\dfrac{\ell^3}{k}$ は整数であり，k，ℓ は互いに素であるため，$k=1$

ゆえに，$2\cos\alpha=\ell$ となり，$2\cos\alpha$ は整数。…(☆)

しかし，$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ ゆえ，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ で，$\cos\dfrac{\pi}{3}<\cos\alpha<\cos 0$

すなわち，$\dfrac{1}{2}<\cos\alpha<1$ であり，$1<2\cos\alpha<2$ であり，(☆) に矛盾する。

以上から，$2\cos\alpha$ は無理数である。

$\cos\alpha$ が有理数と仮定すると，$2\cos\alpha$ も有理数であるため直ちに矛盾する。

したがって，$\cos\alpha$ も無理数である。

【総括】

$\cos n\theta$ が $\cos\theta$ の n 次式で表せるという有名ネタ (チェビシェフの多項式) をベースとした典型問題です。

大阪大受験生であれば，この類の問題は経験しているはずです。

ただ，このあたりの話題を体系的に整理できておらず，
「そういえば似たような類題やったことあったかも」
程度の理解度だとファンブルもあり得ます。