r を正の実数とする。複素数平面上で，点 z が点 $\dfrac{3}{2}$ を中心とする半径 r の円周上を動くとき，

$$z+w=zw$$

を満たす点 w が描く図形を求めよ。

＜ ’22 大阪大 ＞

【戦略】

点 z の動きに伴って動く点 w の軌跡を求める典型問題です。

点 z の動きを縛っている式は

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad \cdots ①$$

として与えられています。

点 w の軌跡，すなわち w の動きを縛っている式を Get したいわけですから

z と w の関係式 $z+w=zw$ を $z=$(w の式) として ① に代入することで w を縛っている式を Get します。

この方針により，$2r|w-1|=|w-3|$ という関係式を得ます。

一般に

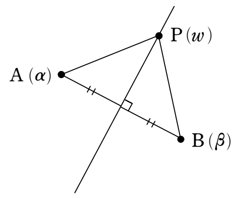
$$a|w-\alpha|=b|w-\beta| \ (a>0,\ b>0)$$

を満たす点 w の軌跡は

$\mathrm{P}(w)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ に対して $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=b:a$ を満たす点 P の軌跡です。

$a=b$ のとき ($|w-\alpha|=|w-\beta|$ のとき)

点 α，β を結ぶ線分の垂直二等分線



$a\neq b$ のとき

線分 AB を $b:a$ に $\begin{cases}\text{内分する点を C}\\ \text{外分する点を D}\end{cases}$ としたとき，線分 CD を直径にもつ円 (アポロニウスの円)

となります。

このあたりの結果，及び導出過程における式変形は，ある程度常識としておきたい部分で，

$$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2$$

という基本関係式を駆使しながらまとめていきます。

【解答】

z は

$$\left|z-\frac{3}{2}\right|=r \quad \cdots ①$$

を満たす。

$z+w=zw$ を変形すると，$(w-1)z=w$

$w=1$ とすると，$0\cdot z=1$ となり，これを満たす z は存在しない。

ゆえに，$w\neq 1$ であり，このとき $z=\dfrac{w}{w-1}$ $\cdots ②$

② を ① に代入すると

$$\left|\frac{w}{w-1}-\frac{3}{2}\right|=r$$

$$\left|\frac{2w-3(w-1)}{2(w-1)}\right|=r$$

$$\left|\frac{-w+3}{2(w-1)}\right|=r$$

$$\frac{|w-3|}{2|w-1|}=r$$

$$2r|w-1|=|w-3| \quad \cdots (*)$$

[1] $2r=1$，すなわち $r=\dfrac{1}{2}$ のとき

$(*)$ は $|w-1|=|w-3|$

ゆえに，$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(3)$ としたとき，w の描く図形は線分 AB の垂直二等分線である。

[2] $2r\neq 1$，すなわち $r\neq\dfrac{1}{2}$ $(r>0)$ のとき

$(*)$ より，

$$4r^2|w-1|^2=|w-3|^2$$

$$4r^2(w-1)(\overline{w}-1)=(w-3)(\overline{w}-3)$$

$$(4r^2-1)w\overline{w}-(4r^2-3)w-(4r^2-3)\overline{w}+4r^2-9=0$$

$$w\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\overline{w}+\frac{4r^2-9}{4r^2-1}=0$$

$$\left(w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)\left(\overline{w}-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)-\left(\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right)^2=-\frac{4r^2-9}{4r^2-1}$$

$$\left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|^2=\frac{(4r^2-3)^2-(4r^2-9)(4r^2-1)}{(4r^2-1)^2} \quad \left(=\frac{16r^2}{(4r^2-1)^2}\right)$$

$$\left|w-\frac{4r^2-3}{4r^2-1}\right|=\left|\frac{4r}{4r^2-1}\right|$$

以上から，求める点 w の軌跡は

$$\begin{cases} r=\dfrac{1}{2} \text{ のとき 点 } 1,\ 3 \text{ を結ぶ線分の垂直二等分線} \\ r\neq\dfrac{1}{2} \text{ のとき 点 } \dfrac{4r^2-3}{4r^2-1} \text{ を中心とする半径 } \left|\dfrac{4r}{4r^2-1}\right| \text{ の円} \end{cases} \cdots 答$$

【総括】

典型問題の範疇と言ってよい問題です。

文字 r を含んだままの処理であるため，多少の計算はありますが，流れ自体は明確に見えていなければならない問題であり，合格者は確保して然るべき問題です。

通常この手の問題の多くは，$w=f(z)$ の形で与えられていますが，

$$z+w=zw$$

という和と積の形で与えられているのがオシャレです。