

関数 $f(x)$ は区間 $x \geq 0$ において連続な増加関数で $f(0) = 1$ を満たすと
する。ただし $f(x)$ が区間 $x \geq 0$ における増加関数であるとは、区間内の
任意の実数 x_1, x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときを
いう。以下、 n は正の整数とする。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx = \infty$ を示せ。

(2) 区間 $y > 2$ において関数 $F_n(y)$ を $F_n(y) = \int_{2 + \frac{1}{n}}^y \frac{f(x)}{x - 2} dx$ と定める

とき、 $\lim_{y \rightarrow \infty} F_n(y) = \infty$ を示せ。また $2 + \frac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2 - \frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2 - x} dx + \int_{2 + \frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2 - x} dx = 0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (2) の a_n について、不等式 $a_n < 4$ がすべての n に対して成り立つ
ことを示せ。