関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする。ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$ が成り立つときをいう。以下，n は正の整数とする。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=\infty$ を示せ。

(2) 区間 $y>2$ において関数 $F_n(y)$ を $\displaystyle F_n(y)=\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{x-2}\,dx$ と定めるとき，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}F_n(y)=\infty$ を示せ。また $2+\dfrac{1}{n}$ より大きい実数 a_n で

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=0$$

を満たすものがただ 1 つ存在することを示せ。

(3) (2) の a_n について，不等式 $a_n<4$ がすべての n に対して成り立つことを示せ。

＜ ’22 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) $\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}$ **を直接計算することが叶わないため**

$\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}$ **を小さくしよう**

という気持ちで評価します。

定積分を評価するには「積分区間を見る」というのが定石です。

(2) **前半の** $\displaystyle\lim_{y\to\infty}F_n(y)=\infty$ **の証明についても** (1) **と同様に**

$F_n(y)$ **を小さくしよう**

という気持ちで評価します。

後半については，前半部分が大きなヒントになっており

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=0$$

という「y **についての方程式が** $y=a_n$ **という解をただ** 1 **つもつ」**

と捉えると，$\displaystyle g(y)=\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{2-x}\,dx$ **と設定したくなります。**

ここから目指すべきは，g **の単調性と** g **が異符号の値をとり得るという** 2 **点です。**

(3) (2) **の途中経過で** $g\left(2+\dfrac{1}{n}\right)>0$ **であることと，**$g(y)$ **が単調減少であることが分かりますから，**$g(4)<0$ **が言えれば解決です。**

【解答】

(1) 積分区間 $0\leqq x\leqq 2-\dfrac{1}{n}$ で，$f(x)$ が増加関数であるため，$f(0)\leqq f(x)$ すなわち

$$1\leqq f(x)$$

この積分区間で，$2-x\geqq 2-\left(2-\dfrac{1}{n}\right)>0$ であるため

$$\frac{1}{2-x}\leqq\frac{f(x)}{2-x}$$

よって，$\displaystyle\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{1}{2-x}\,dx\leqq\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx$ …①

ここで，
$$\begin{aligned}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{1}{2-x}\,dx&=\Big[-\log|2-x|\Big]_0^{2-\frac{1}{n}}\\&=-\left\{\log\left|2-\left(2-\frac{1}{n}\right)\right|-\log 2\right\}\\&=\log 2-\log\frac{1}{n}\\&=\log 2+\log n\\&=\log 2n\quad\cdots②\end{aligned}$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{1}{2-x}\,dx=\lim_{n\to\infty}\log 2n=\infty$ …③

①，③ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{2-\frac{1}{n}}\frac{f(x)}{2-x}\,dx=\infty$ である。

(2) 積分区間 $2+\dfrac{1}{n}\leqq x\leqq y$ において $f(x)$ は増加関数であるから

$$\frac{f\left(2+\frac{1}{n}\right)}{x-2}\leqq\frac{f(x)}{x-2}$$

よって，$\displaystyle f\left(2+\frac{1}{n}\right)\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{1}{x-2}\,dx\leqq\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{x-2}\,dx$

すなわち，$\displaystyle f\left(2+\frac{1}{n}\right)\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{1}{x-2}\,dx\leqq F_n(y)$ …④

ここで，
$$\begin{aligned}f\left(2+\frac{1}{n}\right)\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{1}{x-2}\,dx&=f\left(2+\frac{1}{n}\right)\Big[\log|x-2|\Big]_{2+\frac{1}{n}}^{y}\\&=f\left(2+\frac{1}{n}\right)\left\{\log|y-2|-\log\frac{1}{n}\right\}\\&=f\left(2+\frac{1}{n}\right)\{\log|y-2|+\log n\}\\&=f\left(2+\frac{1}{n}\right)\log n\,|y-2|\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(2+\frac{1}{n}\right)\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{1}{x-2}\,dx=\infty$ …⑤

④，⑤ より，$\displaystyle\lim_{y\to\infty}F_n(y)=\infty$

ここで，$y \geqq 2+\dfrac{1}{n}$ であるとき

$$g(y)=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$$

$$\left(=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx-F_n(y)\right)$$ とおく。

このとき

$$\begin{aligned} g'(y)&=-F_n{}'(y)\\ &=-\frac{f(y)}{y-2}\\ &<0 \ (\because f(y)>f(2)>f(0)=1>0) \end{aligned}$$

より，$y>2+\dfrac{1}{n}$ のとき，$g(y)$ は単調減少である。

ここで，

$$\begin{aligned} g\left(2+\frac{1}{n}\right)&=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{2+\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx\\ &=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx\\ &\geqq \log 2n \ (\because ①,②)\\ &>0 \ \cdots ⑥ \end{aligned}$$

一方，$\displaystyle\lim_{y\to\infty} g(y)=-\infty$ …⑦

$g(y)$ は区間 $y \geqq 2+\dfrac{1}{n}$ 連続関数であるため ⑥，⑦ より

$y>2+\dfrac{1}{n}$ の範囲に $g(y)=0$ となる y がただ 1 つ存在し，それを a_n と呼ぶと

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{a_n} \frac{f(x)}{2-x}\,dx=0$$

を満たす。

これより，題意は示された。

(3) $\displaystyle g(4)=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}\,dx$

ここで，

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}\,dx=\int_{2-\frac{1}{n}}^{0} \frac{f(4-t)}{t-2}(-dt) \quad (x=4-t \text{ とおいた})$$

$$=-\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-t)}{2-t}\,dt$$

定積分の値は積分変数によらないので

$$\int_{2+\frac{1}{n}}^{4} \frac{f(x)}{2-x}\,dx=-\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-x)}{2-x}\,dx$$

ゆえに，$\displaystyle g(4)=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx-\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(4-x)}{2-x}\,dx$

$$=\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)-f(4-x)}{2-x}\,dx$$

積分区間 $0 \leqq x \leqq 2-\dfrac{1}{n}$ のとき

$(4-x)-x=4-2x \geqq 4-2\left(2-\dfrac{1}{n}\right)>0$ であるため

$x<4-x$ で，$f(x)$ が増加関数なので，$f(x)<f(4-x)$

これより $g(4)<0$ …⑧

⑥，⑧ より，(2) の a_n について，$2+\dfrac{1}{n}<a_n<4$ ということが言えるため，題意は示された。

【総括】

$f(x)$ が具体的に見えないため，具体的に積分計算ができません。

等式をつなぐことを諦め，不等式を繋ぐ「評価」という路線に集中します。

定積分の評価のコツは「積分区間に注目する」ということです。

特に現役生はこのあたりの習熟度がまだまだ完成しきってないという人も多いのが現状で，試験場では手ごたえがないと感じる人の方が多いでしょう。

(2) の主張を

$$\int_0^{2-\frac{1}{n}} \frac{f(x)}{2-x}\,dx+\int_{2+\frac{1}{n}}^{y} \frac{f(x)}{2-x}\,dx=0$$

が $y=a_n$ というただ 1 つの解をもつ

というように捉えなおせるかという部分がこの問題の急所となるわけですが，前半の $F_n(y)$ のくだり (出題者の親心) も多くの人は優しさと受け取れなかった人が多いと思います。