2022 年度 名古屋大学 理系 第3問

複素数平面上に，原点 O を頂点の 1 つとする正六角形 OABCDE が与えられている。ただしその頂点は時計の針の進む方向と逆向きに O，A，B，C，D，E とする。互いに異なる 0 でない複素数 α，β，γ が

$$0 \leqq \arg\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \leqq \pi,\ 4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0,\ 2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$$

を満たし，α，β，γ のそれぞれが正六角形 OABCDE の頂点のいずれかであるとする。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ を求め，α，β がそれぞれどの頂点か答えよ。

(2) 組 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をすべて求め，それぞれの組について正六角形 OABCDE を複素数平面上に図示せよ。

＜ ’22 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **与えられた条件の中で，α，β の関係式である $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ に注目します。**

これは同次式であり，両辺 α^2（$\neq 0$）で割ることで

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+4=0$$

というように，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ という塊に関する 2 次方程式が得られます。

これにより，$\dfrac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$ と得られますが，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角に関する条件から，$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$ と特定されます。

ここまでくれば，$\angle\alpha\mathrm{O}\beta=\dfrac{\pi}{3}$（あんまりよろしくない表現ですからここだけの表現にします）と可能性が限られますし，$|\beta|=2|\alpha|$ という長さの比率から α，β に対応する頂点が特定されます。

(2) **γ を含む条件式**

$$2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$$

に注目します。

ここまで作為的な関係式であれば，因数分解を疑いますが，

$$\{2\gamma-(\alpha+\beta)\}\{\gamma-(\alpha+1)\}=0$$

と因数分解でき，

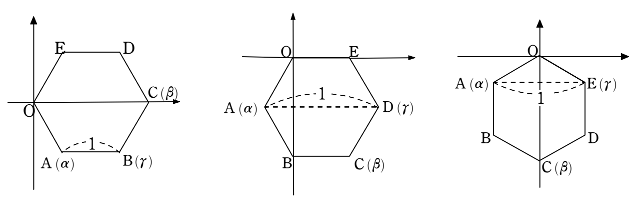
$$\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha+1$$

という非常に明快な関係式が得られます。

$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ とするとは点 α，β を結ぶ線分の中点が γ ということになり，γ がこの正六角形の頂点であることに反してしまいます。

したがって，$\gamma=\alpha+1$ ということになり，α を実軸方向に 1 だけ平行移動した点が γ ということになります。

(1) より A(α)，C(β) であることを考えると 2 頂点 α，γ の位置関係は



となり，ほぼ解決です。

【解答】

(1) 条件 $4\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0$ について，両辺 α^2（$\neq 0$）で割ると

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\beta}{\alpha}+4=0$$

よって，$\dfrac{\beta}{\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$ のとき，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$

$\dfrac{\beta}{\alpha}=1-\sqrt{3}i$ のとき，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{5}{3}\pi$

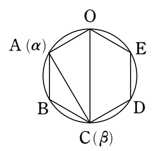
条件 $0\leqq\arg\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)\leqq\pi$ を満たすのは $\dfrac{\beta}{\alpha}=1+\sqrt{3}i$ …答

これより，$\beta=\alpha\cdot 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

ゆえに，$|\beta|=2|\alpha|$ …①，$\arg\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\pi}{3}$ …② であるため

② より，$\begin{cases}\mathrm{A}(\alpha),\ \mathrm{C}(\beta)\\ \mathrm{B}(\alpha),\ \mathrm{D}(\beta)\\ \mathrm{C}(\alpha),\ \mathrm{E}(\beta)\end{cases}$ という可能性があり，

このうち ① を満たすものは A(α)，C(β)



以上から，

点 α に対応する頂点は A，点 β に対応する頂点は C …答

(2) 条件 $2\gamma^2-(3\alpha+\beta+2)\gamma+(\alpha+1)(\alpha+\beta)=0$ から

$$\{2\gamma-(\alpha+\beta)\}\{\gamma-(\alpha+1)\}=0$$

これより，$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$\alpha+1$

$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ のとき，γ は線分 AC の中点が表す複素数でありこの正六角形の頂点とはならない。

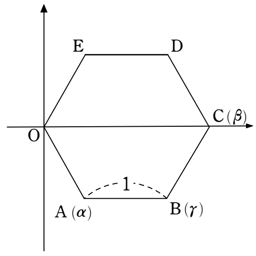
ゆえに，$\gamma=\alpha+1$

γ は点 α を実軸方向に 1 だけ平行移動させた点である。

(1) より A(α)，C(β) であるから γ に対応する頂点は B，D，E のいずれかである。

※ 条件 $\gamma\neq 0$ より，点 γ は O に対応しない。

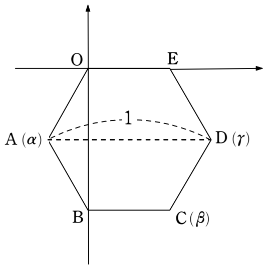
[1]　B(γ) のとき



この正六角形の 1 辺の長さが 1 であることに注意すると

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ 2,\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\ \cdots 答$$

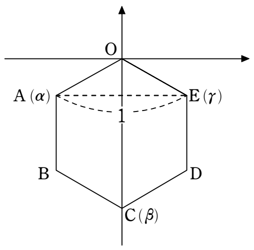
[2]　D(γ) のとき



この正六角形の 1 辺の長さが $\frac{1}{2}$ であることに注意すると

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)\ \cdots 答$$

[3]　E(γ) のとき



この正六角形の 1 辺の長さが $\frac{\sqrt{3}}{3}$ であることに注意すると

$$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i,\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}i,\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\ \cdots 答$$

【総括】

複素数の値がどの頂点に対応するかが与えられていないため，面食らう設定ではありますが，適切な誘導がありますから，そこを足掛かりとして走り切りたいところです。

いかにも作為のありそうな条件から，その作為を読み取る力が問われます。

特別なことは必要ありませんが，「頭に血が昇ると見えるものが見えなくなりそう」という試験場では差がつくタイプの問題です。