1つのサイコロを3回投げる。1回目に出る目を a，2回目に出る目を b，3回目に出る目を c とする。なおサイコロは1から6までの目が等しい確率で出るものとする。

(1) $ab+2c \geqq abc$ となる確率を求めよ。

(2) $ab+2c$ と $2abc$ が互いに素となる確率を求めよ。

< '22 名古屋大 >

【戦略 1】

(1) **サイコロの目には上限があり，「絞り込む」というイメージで進めていくことを考えます。**

そう考えると， $\leqq \square$ という上から押さえる形で見たくなるでしょう。

このイメージで与えられた不等式を $abc-ab-2c \leqq 0$ と見ます。

ここからは整数問題的な発想で和の形よりも

$$(ab-2)(c-1) \leqq 2$$

という積の形で見ます。

c の値で分類すれば ab の値が限られるため，しらみつぶしで $(a,\ b)$ という組が数えられます。

(2) **2 という係数からひとまず今回の2数 $ab+2c$，$2abc$ の偶奇に着目したいところです。**

ab が偶数だと $ab+2c$，$2abc$ がともに偶数ということになり，これらが互いに素であることに反してしまいます。

したがって ab が奇数でなければならないことになり，ここが急所となります。

ここから $ab=1,\ 3,\ 5,\ 9,\ 15,\ 25$ という可能性がありますが，ここまでできたら，それぞれのケースを総当たりで調べればよいでしょう。

【解 1】

(1) $abc-ab-2c \leqq 0$，すなわち $(ab-2)(c-1) \leqq 2$ …① となる確率を求めればよい。

[1] $c=1$ のとき ① は $(ab-2)\cdot 0 \leqq 2$

これを満たす a，b は任意であり，$(a,\ b)$ は $6\cdot 6=36$【通り】

[2] $c=2$ のとき ① は $ab-2 \leqq 2$，すなわち $ab \leqq 4$

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$
$(1,\ 4),\ (2,\ 2),\ (4,\ 1)$

ゆえに，① を満たす $(a,\ b)$ は 8 通り

[3] $c=3$ のとき ① は $2(ab-2) \leqq 2$，すなわち $ab \leqq 3$

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (1,\ 3),\ (3,\ 1)$

ゆえに，① を満たす $(a,\ b)$ は 5 通り

[4] $c=4$ のとき ① は $ab \leqq \dfrac{8}{3}$ で，$ab=1,\ 2$

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

ゆえに，① を満たす $(a,\ b)$ は 3 通り

[5] $c=5$ のとき ① は $ab \leqq \dfrac{5}{2}$ で，$ab=1,\ 2$

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

ゆえに，① を満たす $(a,\ b)$ は 3 通り

[6] $c=6$ のとき ① は $ab \leqq \dfrac{12}{5}$ で，$ab=1,\ 2$

$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

ゆえに，① を満たす $(a,\ b)$ は 3 通り

以上 [1], [2], [3], [4], [5], [6] から，求める確率は

$$\frac{36+8+5+3+3+3}{6^3}=\frac{29}{108} \quad \cdots 答$$

⑵ ab が偶数だと，$ab+2c$ と $2abc$ はともに偶数ゆえ，互いに素とならない。

ゆえに，ab は奇数である。

以後，$m=ab+2c$，$n=2abc$ とする。

[a] $ab=1$ のとき

このとき，$(a\,,\,b)=(1\,,\,1)$

$\begin{cases} m=2c+1 \\ n=2c \end{cases}$ で，m，n は連続 2 整数ゆえ，c の値によらず互いに素となる。

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $1\cdot6=6$【通り】

[b] $ab=3$ のとき

$(a\,,\,b)=(1\,,\,3)$，$(3\,,\,1)$

$\begin{cases} m=2c+3 \\ n=6c \end{cases}$ で，m，n が互いに素となるとき

$c=1$，2，4，5

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $2\cdot4=8$【通り】

[c] $ab=5$ のとき

$(a\,,\,b)=(1\,,\,5)$，$(5\,,\,1)$

$\begin{cases} m=2c+5 \\ n=10c \end{cases}$ で m，n が互いに素となるとき

$c=1$，2，3，4，6

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $2\cdot5=10$【通り】

[d] $ab=9$ のとき

$(a\,,\,b)=(3\,,\,3)$

$\begin{cases} m=2c+9 \\ n=18c \end{cases}$ で m，n が互いに素となるとき

$c=1$，2，4，5

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $1\cdot4=4$【通り】

[e] $ab=15$ のとき

$(a\,,\,b)=(3\,,\,5)$，$(5\,,\,3)$

$\begin{cases} m=2c+15 \\ n=30c \end{cases}$ で m，n が互いに素となるとき

$c=1$，2，4

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $2\cdot3=6$【通り】

[f] $ab=25$ のとき

$(a\,,\,b)=(5\,,\,5)$

$\begin{cases} m=2c+25 \\ n=50c \end{cases}$ で m，n が互いに素となるとき

$c=1$，2，3，4，6

よって題意を満たす $(a\,,\,b\,,\,c)$ は $1\cdot5=5$【通り】

以上 [a]，[b]，[c]，[d]，[e]，[f] より，求める確率は

$$\frac{6+8+10+4+6+5}{6^3}=\frac{13}{72}\ \cdots 答$$

【戦略 2】(2) について

$ab+2c$, $2abc$ という 2 数は , ab と $2c$ の和と積です。

このことから ,

$$p+q\text{ , }pq\text{ が互いに素 }\Leftrightarrow p\text{ , }q\text{ が互いに素}$$

という有名事実に目が向くという作戦も考えられます。

ただし , 有名事実とは言え , 実戦の現場でこれが当たり前のように出てくるかどうかは確固たる経験値が必要でしょう。

【解 2】(2) について

一般に

補題
2 つの正の整数 p , q に対して
$p+q$, pq が互いに素 $\Leftrightarrow$ p , q が互いに素

であることを示す。

($\Longrightarrow$ について)

$p+q$, pq が互いに素であるとき , p , q が共通素因数 P をもつと仮定すると

$$\begin{cases} p=P\alpha \\ q=P\beta \end{cases} (\alpha\text{ , }\beta\text{ は正の整数})$$

と表せ , $\begin{cases} p+q=P(\alpha+\beta) \\ pq=P^2\alpha\beta \end{cases}$ となり , $p+q$, pq も共通素因数 P をもち $p+q$, pq が互いに素であることに矛盾する。

よって , $p+q$, pq が互いに素 $\Longrightarrow$ p , q が互いに素

($\Longleftarrow$ について)

p , q が互いに素であるとき , $p+q$, pq が共通素因数 P をもつと仮定する。

このとき , $\begin{cases} p+q=PM \\ pq=PN \end{cases}$ (M , N は正の整数) と表せる。

pq が素数 P の倍数であるため , p , q の少なくとも一方は P の倍数。

p が P の倍数であるならば , $q=PM-p$ より , q も P の倍数。
q が P の倍数であるならば , $p=PM-q$ より , p も P の倍数。

いずれにせよ , p , q がともに P の倍数となり , p , q が互いに素であることに矛盾する。

よって , p , q が互いに素 $\Longrightarrow$ $p+q$, pq が互いに素

さて , $p=ab$, $q=2c$ とすると , 求める確率は $p+q$, pq が互いに素である確率であり , 補題から

p , q が互いに素である

という確率について求めればよい。

ab と $2c$ が互いに素であるためには , ab が奇数であることが必要。

$ab=1$ のとき $(a\text{ , }b)=(1\text{ , }1)$

ab がもつ素因数が 3 のみであるとき $(a\text{ , }b)=(1\text{ , }3)$, $(3\text{ , }1)$, $(3\text{ , }3)$

ab がもつ素因数が 5 のみであるとき $(a\text{ , }b)=(1\text{ , }5)$, $(5\text{ , }1)$, $(5\text{ , }5)$

ab がもつ素因数が 3 , 5 のとき $(a\text{ , }b)=(3\text{ , }5)$, $(5\text{ , }3)$

[1] $c=1$, 2 , 4 のとき

$(a\text{ , }b)$ は上記 9 通り全てに対して , ab , $2c$ が互いに素となる。

[2] $c=3$, 6 のとき

$(a\text{ , }b)=(1\text{ , }1)$, $(1\text{ , }5)$, $(5\text{ , }1)$, $(5\text{ , }5)$ の 4 通りに対して
ab , $2c$ が互いに素となる。

[3] $c=5$ のとき

$(a\text{ , }b)=(1\text{ , }1)$, $(1\text{ , }3)$, $(3\text{ , }1)$, $(3\text{ , }3)$ の 4 通りに対して
ab , $2c$ が互いに素となる。

以上から , 求める確率は

$$\frac{3\cdot9+2\cdot4+1\cdot4}{6^3}=\frac{13}{72}\ \cdots\text{答}$$

【総括】

調べるだけと言ってしまえばそれまでですが , 調べやすい形で見ることができるかが大切です。

(1) は c を先に決めてから , ab を考える方が考えやすいと思います。

(2) は ab を先に決める【解 1】, c を先に決める【解 2】について , どちらが考えやすいかは人によるでしょう。

推測の域を出ませんが , 与えられた数値が【解 2】の補題をモロに意識したような作為的な設定なので , 出題者としては【解 2】の路線が頭の中にあったのかもしれません。

ただ , 個人的には ab が奇数と分かった段階で , ab を先に決めてしまい , その後 c についてしらみつぶす【解 1】の路線が分かりやすいですし , 名古屋大の場合 , 時間には比較的余裕があるため , 洒落た工夫を試行錯誤するよりかは愚直に調べきってしまう方が試験場では気が楽です。