a，b を実数とする。

(1) 整式 x^3 を 2 次式 $(x-a)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

(2) 実数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$ で整式 x^3 を割ったときの余りが $3x+b$ とする。b の値に応じて，このような $f(x)$ が何個あるかを求めよ。

＜ '22 名古屋大 ＞

【戦略】

(1) **実際に割り算するだけであり，凝ったことをする必要もないでしょう。**

(2) **これも実際に x^3 を $x^2+\alpha x+\beta$ で割り算して出てくる余り $(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$ が $3x+b$ と x についての恒等式であることから**

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta=3\\ \alpha\beta=b\end{cases}$$

を得て，β を消去すると，$\alpha^3-3\alpha=b$ という関係式が得られます。

これを満たす α の個数は

α が決まれば β が決まり，$f(x)$ が決まる

という流れを考えれば $f(x)$ の個数に直結します。

したがって，結局は α に関する 3 次方程式 $\alpha^3-3\alpha=b$ の実数解の個数を求めればよいことになります。

これについては $y=\alpha^3-3\alpha$，$y=b$ のグラフの共有点の個数を求める定番の処理です。

【解答】

(1)

$$\begin{array}{r|l} & x+2a \\ \hline x^2-2ax+a^2 & x^3 \\ & x^3-2ax^2+a^2x \\ \hline & 2ax^2-a^2x \\ & 2ax^2-4a^2x+2a^3 \\ \hline & 3a^2x-2a^3 \end{array}$$

よって，求める余りは $3a^2x-2a^3$ …答

(2)

$$\begin{array}{r|l} & x-\alpha \\ \hline x^2+\alpha x+\beta & x^3 \\ & x^3+\alpha x^2+\beta x \\ \hline & -\alpha x^2-\beta x \\ & -\alpha x^2-\alpha^2 x-\alpha\beta \\ \hline & (\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta \end{array}$$

となり，余りは $(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$

条件より，$(\alpha^2-\beta)x+\alpha\beta$ と $3x+b$ が x についての恒等式であるため，

$$\begin{cases}\alpha^2-\beta=3 \ \cdots ①\\ \alpha\beta=b \ \cdots ②\end{cases}$$

① より $\beta=\alpha^2-3$ …③

③ を ② に代入し，$\alpha^3-3\alpha=b$ …(*)

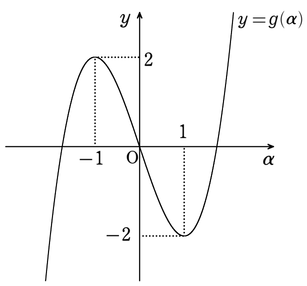
③ より，α が 1 つ定まると，それに応じて β が定まり，$f(x)$ が 1 つ定まる。

ゆえに，(*) を満たす α の個数が求めるものである。

$g(\alpha)=\alpha^3-3\alpha$ とおくと，

$$\begin{aligned}g'(\alpha)&=3\alpha^2-3\\&=3(\alpha+1)(\alpha-1)\end{aligned}$$

α	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(\alpha)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(\alpha)$	↗	2	↘	-2	↗



(*) を満たす α は $y=g(\alpha)$ と $y=b$ とのグラフの交点の α 座標であるため，これらのグラフの交点の個数を求めればよく

$$\begin{cases}b<-2,\ 2<b \text{ のとき } & 1 \text{ 個}\\ b=\pm 2 \text{ のとき } & 2 \text{ 個}\\ -2<b<2 \text{ のとき } & 3 \text{ 個}\end{cases}\ \cdots \text{答}$$

【総括】

非常に基本的な問題であり，素直に進めていって問題はないでしょう。

(1) が上手く効いてくるのかと身構えていましたが，特に劇的に効いてくる様子もなく終わってしまいます。

これは緊張した試験場であっても確保したい一問です。

凝ったことをするのであれば、

x^3 を $(x-a)^2$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $px+q$ とすると

$$x^3=(x-a)^2Q(x)+px+q \quad \cdots (☆)$$

これより，$a^3=pa+q$

$(☆)$ の両辺を微分すると

$$3x^2=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)+p$$

よって，$p=3a^2$

これより，$a^3=3a^3+q$ であるため，$q=-2a^3$

求める余りは $3a^2x-2a^3$

などの解法が考えられますが，直接割り算をしてしまった方が気は楽です