複素数 z に関する次の 2 つの方程式を考える。ただし，$\overline{z}$ を z と共役な複素数とし，i を虚数単位とする。

$$z\overline{z}=4 \ \cdots\cdots ① \qquad |z|=|z-\sqrt{3}+i| \ \cdots\cdots ②$$

(1) ①，② それぞれの方程式について，その解 z 全体が表す図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) ①，② の共通解となる複素数をすべて求めよ。

(3) (2) で求めたすべての複素数の積を w とおく。このとき，w^n が負の実数となるための整数 n の必要十分条件を求めよ。

＜ '22 北海道大 ＞

【戦略】

(1) **① は $|z|^2=4$，すなわち $|z|=2$ とほぐせば原点中心，半径 2 の円と即答です。**

② については $|z-\alpha|=|z-\beta|$ を満たす点 z の集合は $\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$ としたときに，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ を満たす点 P の軌跡と考え，

線分 AB の垂直二等分線

と出す，これまた基本事項です。

(2) **「① を満たす点 z 集まれ～」**
「② を満たす点 z 集まれ～」

と呼びかけて図示したときの交点が ①，② をともに満たす z，すなわち ①，② の共通解ということになります。

ここまできたら，複素数平面に拘らず，xy 平面における

$$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}x-2 \end{cases}$$

の交点として求めた方が記述も楽でしょう。

(3) **(2) の共通解が $-2i$，$\sqrt{3}+i$ と求まっていれば，w はその積なので**

$w=(-2i)(\sqrt{3}+i)=2-2\sqrt{3}i$ と具体的に求まります。

ここから w^n を考えるにあたっては，ド・モアブルの定理がインスピレーションされて然るべきでしょう。

$w=4\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$ と極形式で表し，

$$w^n=4^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$$

とします。

これが負の実数となるというためには，偏角が $\pi+2m\pi$ (m：整数) となっていることが必要十分です。

つまり，$-\dfrac{n\pi}{3}=(2m+1)\pi$ ということになります。

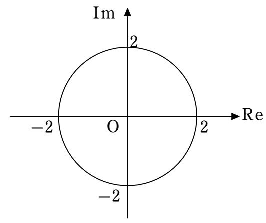
【解答】

(1) ① について

$|z|^2=4$ より，$|z|=2$ で，① を満たす点 z 全体が表す図形は

原点中心，半径 2 の円

これを図示すると以下の (図 1) のようになる。



(図 1)

② について

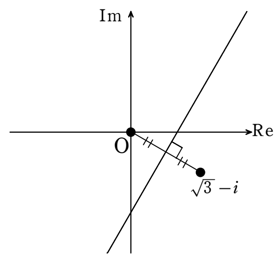
$|z-0|=|z-(\sqrt{3}-i)|$ より，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\sqrt{3}-i)$ としたとき

$$\mathrm{PO}=\mathrm{PA} \ \cdots ②'$$

これより，② を満たす点 z 全体 (②′ を満たす点 P の軌跡)が表す図形は

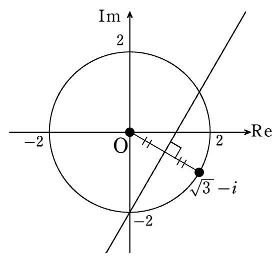
線分 OA の垂直二等分線

これを図示すると以下の (図 2) のようになる。



(図 2)

(2) ① を満たす点 z 全体の集合と，② を満たす点 z 全体の集合を一つの複素数平面上に同時に図示すると以下の (図 3) のようになる。



(図 3)

この円と直線の交点が表す複素数が求める共通解である。

xy 平面で考え，$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=\sqrt{3}x-2 \end{cases}$ の交点を考える。

これら 2 式から y を消去すると，$x^2+(\sqrt{3}x-2)^2=4$

整理すると，$x^2-\sqrt{3}x=0$，すなわち $x(x-\sqrt{3})=0$

ゆえに，交点は $(0,\ -2)$，$(\sqrt{3},\ 1)$ なので，求める共通解は

$$z=-2i,\ \sqrt{3}+i \ \cdots \text{答}$$

(3) $w=(-2i)(\sqrt{3}+i)$
$=2-2\sqrt{3}\,i$
$=4\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}$

ド・モアブルの定理から

$$w^n=4^n\left\{\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right\}$$

これが負の実数となるための必要十分条件は

$$-\frac{n\pi}{3}=(2m+1)\pi\ \ (m：整数)$$

すなわち，

$$\begin{aligned} n&=-6m-3\\ &=6(-m-1)+3 \end{aligned}$$

と表せること。

したがって求める n についての必要十分条件は

n が 6 で割って 3 余る整数 … 答

【総括】

不気味なぐらい基本的な問題です。

今年のセットでは絶対に落としてはならないでしょう。

確保するのは前提として，手際よく処理し，時間的余裕も確保したいところです。